Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2007

Lista uczestników ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 523 (WT=2,99) i 524 (WT=1,38) z numeru 6/2006

Michał Kieza	– 1– 44,87
Jerzy Cisło	– 4– 43,71
Marian Łupieżowiec	– 43,55
Michał Jastrzębski	– 41,19
Piotr Kumor	– 9– 38,84
Łukasz Garncarek	– 38,19
Zbigniew Galias	– 1– 38,09
Marcin Kasperski	– 2– 36,86
Krzysztof Dorobisz	– 36,37
Krzysztof Kamiński	– 35,52
Dariusz Kurpiel	– 2– 34,82
Tomasz Wietecha	– 6– 32,18
Paweł Kubit	– 3– 31,15
Marek Prauza	– 3– 30,56
Leszek Grzanka	– 29,14
Franciszek S. Sikorski	– 29,11
Tomasz Warszawski	– 1– 27,89
Janusz Olszewski	– 8– 27,87
Grzegorz Karpowicz	– 27,61
Jan Czardybon	– 26,21
Witold Bednarek	– 3– 25,48
Marek Spychała	– 24,60
Grzegorz Kozłowski	– 23,23
Jerzy Witkowski	– 4– 21,86

Legenda (przykładowo): stan konta 9–38,84 oznacza, że uczestnik już dziewięciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziesiątej) rundzie ma 38,84 punktów.

Listę otwiera **Michał Kieza**, który po raz drugi zgromadził na koncie 44 punkty.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2004, 2005 lub 2006.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, ktorzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 535, 536

Redaguje Marcin E. KUCZMA

535. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze postaci $p = \dfrac{b}{2}\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$, gdzie a, b są liczbami naturalnymi.

536. Znaleźć wszystkie wielomiany W (o współczynnikach rzeczywistych) spełniające równanie
$$W(x)+W(4x)+W(6x)+W(7x) = W(2x)+W(3x)+W(5x)+W(8x) \text{ dla } x\in\mathbb{R}.$$

Zadanie 536 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/2006

Przypominamy treść zadań:

527. Funkcja f, określona na zbiorze wszystkich liczb nieujemnych, o wartościach rzeczywistych, jest różniczkowalna w przedziale $(0;\infty)$, ciągła prawostronnie w punkcie 0 oraz spełnia warunki
$$f(0)=0, \qquad |f'(x)| \leqslant \pi\cdot|f(x)| \quad \text{dla } x>0.$$
Czy z tych założeń wynika, że f jest funkcją równą tożsamościowo zeru?

528. Wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej a oraz każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość
$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{a+k}{n}\right\rfloor = \lfloor a\rfloor.$$

527. Odpowiedź: *Tak.* Przypuśćmy bowiem, że dla pewnej liczby $b\in(0;\infty)$ wartość $f(b)$ jest różna od zera. Z założeń wynika, że funkcja f jest ciągła w $\langle 0;\infty)$. Zatem zbiór $\{x\colon\ 0\leqslant x\leqslant b,\ \ f(x)=0\}$ (niepusty, bo $f(0)=0$) ma największy element – oznaczmy go przez a; oczywiście $a<b$, skoro $f(b)\neq 0$.

W przedziale $(a;b\rangle$ funkcja f ma wartości niezerowe. Niech $g(x)=\ln|f(x)|$ dla $x\in(a;b\rangle$. Funkcja f jest ciągła w punkcie a, przy tym $f(a)=0$, więc $\lim_{x\to a+} g(x) = -\infty$. Jednak
$$|g'(x)| = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| \leqslant \pi.$$
Funkcja g, której pochodna jest w przedziale skończonej długości $(a;b\rangle$ ograniczona, sama musi być w tym przedziale ograniczona (łatwy wniosek z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej dla pochodnych). Ale wcześniej zauważyliśmy, że przy lewym końcu tego przedziału wartości g dążą do $-\infty$. Sprzeczność dowodzi, że odpowiedź *tak* jest prawidłowa.

528. Zapiszmy liczbę a w postaci $a = qn+r+\delta;\ \ q\in\mathbb{Z},\ r\in\{0,1,\ldots,n-1\},\ \delta\in\langle 0;1)$. Przekształcamy badaną sumę:
$$S = \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{a+k}{n}\right\rfloor = \sum_{k=0}^{n-1}\left(q+\left\lfloor\frac{r+k+\delta}{n}\right\rfloor\right) = nq + \sum_{k=0}^{n-1} c_k,$$
gdzie
$$c_k = \left\lfloor\frac{r+k+\delta}{n}\right\rfloor = \begin{cases} 0 & \text{dla } k<n-r,\\ 1 & \text{dla } k\geqslant n-r.\end{cases}$$
W ciągu $(c_0,c_1,\ldots,c_{n-1})$ jest więc r jedynek, i wobec tego $S = nq+r = \lfloor a\rfloor$.

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor (9), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (8), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (6), T. Józefczyk, J. Witkowski (4), W. Bednorz, B. Dyda (4), M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit, J. Cisło (4), W. Bednarek (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni": Z. Bartold, A. Czornik, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, M. Kieza, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, P. Najman, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, S. Solecki, G. Zakrzewski;

„jednokrotni": T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Daniluk, A. Dzedzej, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, Z. Skalik, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, T. Warszawski, K. Witek, A. Woryna, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

W zakończonym właśnie sezonie ligowym mamy do odnotowania dwa wyrównania rekordów. Wyrównania – bo o pobiciu nie może być mowy. Chodzi o współczynniki trudności zadań (WT), które z definicji są liczbami z przedziału $\langle 1;4\rangle$. Otóż obie te ekstremalne wartości znalazły się wśród tegorocznych wyników. Oczywiście WT=1,00 za zadanie **517** oznacza, że wszyscy je rozwiązali bez usterki. Taka sytuacja miewała już miejsce parokrotnie.

Również przeciwny kraniec skali został już raz osiągnięty wcześniej, w zadaniu **194** z numeru 8/1989 – trudne równanie diofantyczne (komentarz w omówieniu w 2/1992). Był to jednak okres wielkich przemian w naszym kraju, *Delta* przez czas jakiś nie ukazywała się, ludzie byli zajęci poważniejszymi sprawami niż liga zadaniowa. Rozwiązania zadań z owego miesiąca przysłało zaledwie trzech uczestników, zadania **194** nikt nie ruszył, stąd WT=4,00.

No i teraz znów mamy WT=4,00. Za zadanie **505** – kombinatoryka, żuki na planszy, siatka o 28 węzłach. Redaktor ligi znalazł je w olimpiadzie matematycznej kraju, który niegdyś był jedną z radzieckich republik. Poznał je wraz z rozwiązaniem, sprawiającym wrażenie, że zadanie nie powinno być zbyt trudne...

Jednak wyniki nas zaskoczyły: żadna z przysłanych prac, zdaniem oceniającego, nie zawierała nic, co by mogło dać choćby ułamek punktu; stąd maksymalny WT. (Z tej emocji podaliśmy w numerze 5/2006 błędną informację o współczynnikach trudności zadań **505** i **506**, zamieniając je miejscami – sprostowanie w 7/2006 – ponownie przepraszamy).

Otóż i pouczający przyczynek do wróżenia trudności. Jeśli sam na serio zadania nie atakowałeś, rozwiązanie dostałeś gotowe na talerzu, to o trudności nie wiesz nic! Redaktor ligi, przez wiele lat aktywny w olimpiadzie matematycznej i innych konkursach, więc niby w tej zabawie doświadczony, co raz to ma okazję się przekonać, jak iluzoryczne to doświadczenie.

A swoją drogą ciekawe, jak to zadanie wypadło w tamtej olimpiadzie (w swoim kraju) i czy było przez jej jury wstępnie oceniane jako łatwe czy średnio trudne...

Wśród pozostałych zadań, jak widać z poniższego omówienia, najciekawsze okazały się zadania geometryczne.

Zadanie **505.** [Trójkąt równoboczny podzielony na 36 trójkątów przystających; po liniach podziału łazi 28 żuków, startując z różnych węzłów siatki i zakręcając po każdym ruchu o 60° lub 120° $\Rightarrow$ pewne dwa żuki spotkają się w jednym punkcie] (współczynnik trudności WT=4,00; liczba poprawnych rozwiązań LPR=0; nieapetyczny komizm ostatniego skrótu niezamierzony). To właśnie TO zadanie. W niewielu przysłanych pracach powtarzał się jednakowy błąd: przypuśćmy, że żuki nigdy się nie spotkają; ich pierwszy ruch wyznacza więc permutację 28-elementowego zbioru możliwych pozycji (punktów węzłowych), która rozpada się na cykle. Autorzy omawianych prac przenoszą na owe cykle założenie o kątach $60^\circ, 120^\circ$ (skąd już nietrudna sprzeczność) – co jednak nie ma żadnego uzasadnienia, skoro każdy z cykli składa się z elementów trajektorii *różnych* żuków.

Nie znamy innego rozwiązania niż firmowe, wydrukowane w 1/2006.

Zadanie **508.** [Boki AB, BC, CD, DA czworokąta $ABCD$ są styczne do okręgu w punktach K, L, M, N; $KM \cap LN = \{S\}$ $\Rightarrow$ $|KS|\cdot|AB|\cdot|CM|\cdot|DM| = |MS|\cdot|AK|\cdot|BK|\cdot|CD|$] ($WT$=2,18; LPR=10). Niech a, b, c, d będą długościami odcinków stycznych z punktów A, B, C, D. Umieszczamy w tych punktach masy m_A, m_B, m_C, m_D proporcjonalne do $1/a,\ 1/b,\ 1/c,\ 1/d$; punkt K jest środkiem masy układu $\{A, B\}$, a M jest środkiem masy układu $\{C, D\}$. Zatem środek masy całego układu $\{A, B, C, D\}$ leży na odcinku KM oraz – przez analogię – na odcinku LN; jest to więc punkt S. Gdy masy m_A, m_B przeniesiemy obie do punktu K, a masy m_C, m_D do M, środek masy powstałego układu $\{K, M\}$ pozostanie w punkcie S; stąd

$$\frac{|KS|}{|MS|} = \frac{m_C + m_D}{m_A + m_B} = \frac{1/c + 1/d}{1/a + 1/b} = \frac{ab}{a+b}\cdot\frac{c+d}{cd} \quad \text{(teza).}$$

Jakie proste! Jest to prawie dosłowna reprodukcja rozwiązania, które przedstawili **W.Bednarek**, **M. Jastrzębski**, **J. Olszewski**; a także autor zadania **Piotr Achinger**. Redaktor ligi uznał, niezbyt mądrze, że tę „fizykę" (środki ciężkości) lepiej zastąpić przez kombinacje liniowe wektorów i w ten sposób powstało rozwiązanie firmowe. Niby to samo, jednak straciło lekkość. Ale dzięki temu zyskaliśmy wdzięczną pozycję do omówienia rocznego.

Zadanie **515.** [AB, AD, AE – trzy krawędzie sześcianu; odległość okręgu wpisanego w ścianę $ABCD$ od okręgu opisanego na trójkącie $BDE = ?$] (WT=3,10; LPR=4 (5?)). Ciekawe zadanie – wszystkie rozwiązania różne. **J. Cisło** zauważył, że najkrótszy odcinek łączący punkty obu okręgów musi być współpękowy lub współpłaszczyznowy z prostymi przechodzącymi przez środki tych okręgów i prostopadłymi do ich płaszczyzn; potem przeszedł do rachunków (na współrzędnych), ale już niezawiłych, właśnie dzięki owemu geometrycznemu spostrzeżeniu.

Rozwiązanie od początku do końca rachunkowe (współrzędne, potem pochodne) przedstawił **Ł. Garncarek**.

Rozwiązanie firmowe było oparte na innym geometrycznym spostrzeżeniu: te okręgi są zawarte w sferach – wpisanej w szkielet sześcianu oraz opisanej na sześcianie. Taką metodą zrobił zadanie **J. Olszewski**.

Najprościej, w pewnym sensie również „taką metodą”, poradził sobie **T. Tkocz**, bowiem rozpoznał to jako jedno z zadań z Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych sprzed kilkunastu lat – ku zaskoczeniu redaktora ligi, który je znalazł w całkiem innym źródle, znacznie późniejszym (i z innego kraju).

Jeszcze jeden uczestnik przysłał rozwiązanie, być może dobre, mocno rachunkowe, ale niestety nieczytelne wskutek braku objaśnień użytych oznaczeń.

Zadanie **516.** [Iterowanie operacji $(a,b)\mapsto(a',b')$, gdzie $(a',b')=(2a,\,b{-}a)$ gdy $a<b$, $(a',b')=(a{-}b,\,2b)$ gdy $a\geq b$; dla jakich par początkowych $(a_0,b_0)\in\mathbf{N}^2$ algorytm się zatrzyma?] (WT=2,01; LPR=9). **J. Olszewski**, **T. Rawlik**, **M. Spychała**, **M. Chrzanowski** podali warunek w takiej mniej więcej formie, jak w rozwiązaniu firmowym: iloraz $a_0/(a_0{+}b_0)$ ma być liczbą dwójkowo-wymierną. Bardziej elegancką, bo symetryczną (choć oczywiście równoważną) postać warunku znaleźli **J. Cisło**, **K. Dorobisz**, **Ł. Garncarek**, **P. Kumor**, **J. Witkowski**: iloraz $(a_0{+}b_0)/\mathrm{NWD}(a_0,b_0)$ ma być potęgą dwójki.

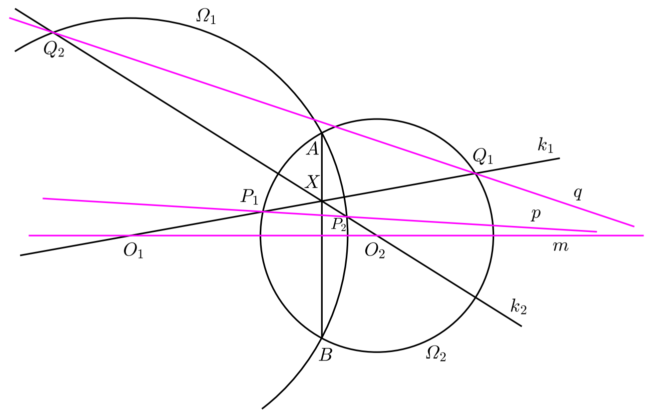
Zadanie **518.** [$\{1,2,\ldots,3n\}=A\cup B\cup C$; $|A|=|B|=|C|=n\ \Rightarrow\ \exists\, a\in A, b\in B, c\in C: a\pm b\pm c=0$] ($WT$=3,53; LPR=2). **J. Olszewski** przysłał rozwiązanie dużej urody; ma ono cechy wspólne z rozwiązaniem firmowym, ale jest zgrabniejsze:

Niech $1\in C$; jeśli $1\in A{-}B$ lub $1\in B{-}A$, to mamy tezę; dalej zakładamy, że $\pm1\notin A{-}B$ (żaden element zbioru A nie sąsiaduje z żadnym elementem B). Jeżeli któryś ze zbiorów A,B, na przykład A, jest rozproszony, tzn. nie zawiera żadnej pary liczb kolejnych, to z własności $\pm1\notin A{-}B$ wynika, że $(n{+}1)$-elementowy zbiór $(A{-}1)\cup\{b\}$, gdzie $b=\min B$, jest zawarty w C – sprzeczność ($|C|=n$).

Gdy żaden ze zbiorów A,B nie jest rozproszony, bierzemy najdłuższy blok X złożony z kolejnych liczb w zbiorze A oraz najdłuższy blok Y w zbiorze B ($|X|>1$, $|Y|>1$). Przyjmijmy, że liczby w zbiorze X są większe od liczb w Y. Zbiór $X{-}Y$ jest blokiem złożonym z $|X|{+}|Y|{-}1$ kolejnych liczb, a więc dłuższym niż X i niż Y; nie jest zatem podzbiorem ani zbioru A, ani B; stąd i z własności $\pm1\notin A{-}B$ łatwy wniosek, że $(X{-}Y)\cap C\neq\emptyset$. Teza.

P. Kumor podał odsyłacz: stary numer *Kwanta* (**P. Kubit**, który zadanie zaproponował, też je stamtąd zaczerpnął).

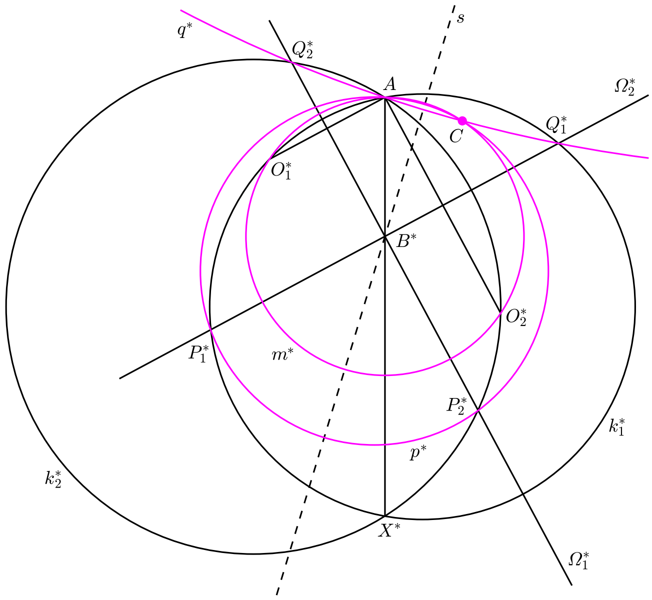
Zadanie **520.** [Okręgi Ω_1,Ω_2 (środki O_1,O_2) przecinają się prostopadle w punktach A,B; na odcinku AB leży punkt X; prosta O_iX przecina Ω_j w punktach P_i,Q_i ($P_i\in\mathrm{odc}\,O_iX$), $\{i,j\}=\{1,2\}\ \Rightarrow$ proste P_1P_2, Q_1Q_2, O_1O_2 przecinają się w punkcie niezależnym od X] (WT=3,49; LPR=3). Rozwiązanie firmowe było wzorowane na rozwiązaniu, które dostarczył **Piotr Achinger**, autor zadania. Dość podobny w charakterze dowód przedstawił **J. Olszewski**. A oto



zupełnie odmienne rozwiązanie, które znaleźli **B. Dyda** i **M. Jastrzębski**:

Inwersja o środku A i dowolnym promieniu przekształca okręgi Ω_i na proste Ω_i^* będące symetralnymi odcinków AO_i^* (gwiazdka oznacza obraz punktu lub figury w tej inwersji); tworzy się trójkąt prostokątny $O_1^*AO_2^*$, punkt B^* jest środkiem przeciwprostokątnej $O_1^*O_2^*$. Obrazami prostych $k_1=O_1X$, $k_2=O_2X$, $m=O_1O_2$, $p=P_1P_2$, $q=Q_1Q_2$ są okręgi przechodzące przez A.

Okrąg k_1^* przecina prostą Ω_2^* w punktach P_1^*,Q_1^*; prosta Ω_1^*, jako symetralna cięciwy AO_1^* okręgu k_1^*, jest też symetralną równoległej cięciwy $P_1^*Q_1^*$. Zatem B^* jest środkiem odcinka $P_1^*Q_1^*$, i analogicznie, środkiem odcinka $P_2^*Q_2^*$. Ponadto B^* leży na osi potęgowej okręgów k_1^*, k_2^*, więc iloczyny $|B^*P_i^*|\cdot|B^*Q_i^*|$ są równe, i wobec tego $P_1^*P_2^*Q_1^*Q_2^*$ jest kwadratem o środku B^*.



Dwusieczna s kąta prostego utworzonego przez proste Ω_1^* i Ω_2^*, przechodząca przez ćwiartkę płaszczyzny zawierającą punkt A, jest wspólną symetralną odcinków $P_1^*P_2^*$ i $Q_1^*Q_2^*$, jest więc osią symetrii każdego z okręgów $p^*=(AP_1^*P_2^*)$, $q^*=(AQ_1^*Q_2^*)$. Jest też osią symetrii okręgu $m^*=(AO_1^*O_2^*)$, bo przechodzi przez jego środek B^*. Punkt C, symetryczny do A względem s, leży na tych trzech okręgach i jest niezależny od X (bo określenie prostej s nie zależało od X). Jest on obrazem inwersyjnym punktu leżącego na prostych p,q,m.

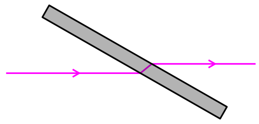
Klub 44

Zadania z fizyki nr 432, 433

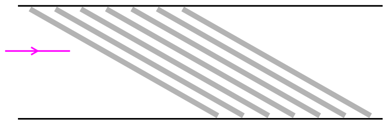
Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2007

432. Jak wiadomo, wiązka światła padająca na powierzchnię szkła pod kątem Brewstera i spolaryzowana w płaszczyźnie załamania biegnie dalej bez odbicia. Dotyczy to również wiązki załamującej się przy wyjściu z płytki płaskorównoległej, jeśli padała ona na płytkę pod kątem Brewstera (rys. 1). Na tej zasadzie oparta jest konstrukcja prostego polaryzatora (rys. 2): zestaw równoległych płytek szklanych umieszczamy w pudełku pomalowanym od środka na czarno i kierujemy na nie równoległą wiązkę światła niespolaryzowanego. Wychodzące światło staje się spolaryzowane, w stopniu zależnym od liczby płytek. Z ilu płytek powinien składać się przyrząd, aby zawierało ono nie więcej niż 10% „niewłaściwej” składowej? Pudełko jest szerokie, tak że trzeba uwzględnić dowolną liczbę odbić światła od różnych powierzchni płytek. Przyjąć $n = 1{,}5$ i pominąć pochłanianie światła w szkle. Należy też pominąć interferencję (przyjąć, że światło jest niespójne).



Rys. 1



Rys. 2

Wskazówka: gdy promień pada na powierzchnię szkła pod kątem Brewstera (lub wybiega pod kątem Brewstera) i jest spolaryzowany w płaszczyźnie prostopadłej, współczynnik odbicia R wynosi

$$R = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right)^2.$$

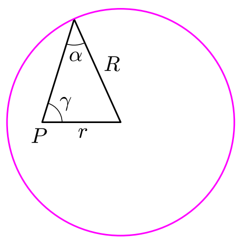
433. W jednym z artykułów ze *Świata Nauki* w zeszłym roku można było przeczytać, że powyżej pewnej energii progowej (tzw. granica GZK) proton może rozproszyć się na niskoenergetycznym fotonie promieniowania reliktowego wypełniającego przestrzeń międzygwiazdową, w wyniku czego powstaje mezon π^0. Obliczyć wartość granicy GZK. Dana jest energia fotonu $E_f = 10^{-3}\,\mathrm{eV}$, masa protonu $m_p = 938\,\mathrm{MeV/c^2}$, masa mezonu $m_{\pi^0} = 135\,\mathrm{MeV/c^2}$.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/2006

Przypominamy treść zadań:

424. Dwa jednakowe tramwaje z tą samą liczbą pasażerów przejechały z tą samą prędkością tę samą trasę, z wieloma przystankami. Czy zachowanie się pasażerów może być przyczyną tego, że jeden tramwaj zużył więcej energii elektrycznej niż drugi?

425. Wewnątrz szklanej kuli, w punkcie P odległym od środka kuli o r znajduje się izotropowe źródło światła. Jaka część wysyłanego światła wydostaje się z kuli? Dane są: współczynnik załamania szkła $n = 1{,}5$ oraz stosunek $k = r/R = 0{,}75$, gdzie R – promień kuli. Szkło jest doskonale przezroczyste.



Rys. 3

424. Jeśli w czasie rozpędzania tramwaju pasażerowie przemieszczają się do przodu, a w czasie hamowania – do tyłu, to wykonują przy tym pracę dodatnią przeciw sile bezwładności, czyli dostarczają energię i powodują zmniejszenie poboru energii elektrycznej. Jeśli wykonują ruchy przeciwne, to ich praca jest ujemna, czyli odbierają energię, kosztem dodatkowego poboru energii z sieci.

Równoważne rozwiązanie opiera się na analizie popędu i pracy siły rozpędzającej tramwaj. Popęd tej siły $\int F\,\mathrm{d}t$ nie zależy od ruchu pasażerów (skoro tramwaj osiąga ten sam pęd końcowy). Gdy jednak początkowo pasażerowie zaczną poruszać się do przodu, a później zatrzymają się względem tramwaju, zwiększą siłę niezbędną do rozpędzania tramwaju w fazie początkowej (kiedy prędkość jest mała), a zmniejszą w fazie końcowej (kiedy prędkość jest duża). Ze wzoru $W = \int Fv\,\mathrm{d}t$ widać, że spowoduje to zmniejszenie pracy silnika.

425. Kąt graniczny dla całkowitego wewnętrznego odbicia jest dany wzorem $\alpha = \arcsin(1/n)$. Korzystając z twierdzenia sinusów (zob. rys. 3), otrzymujemy, że promień pada na powierzchnię kuli pod tym kątem wtedy, gdy

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{k} = \frac{1}{kn}.$$

Równanie to ma dwa rozwiązania (jedno mniejsze, drugie większe od 90°), wyznaczające granice przedziału kątów γ, w którym promień wybiegający z P ulegnie całkowitemu wewnętrznemu odbiciu. Kierunki poza tym przedziałem leżą wewnątrz dwóch wycinków kuli, a miarą kąta bryłowego każdego z tych wycinków jest $2\pi(1 - \cos\gamma)$ – łącznie $4\pi(1 - \cos\gamma)$. Ponieważ pełny kąt bryłowy wynosi 4π, więc szukany ułamek określający stosunek strumienia światła wybiegającego na zewnątrz do całkowitego strumienia wysyłanego przez źródło ma wartość

$$1 - \cos\gamma = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{kn}\right)^2} = 0{,}542.$$

Zauważmy, że promień, który raz uległ całkowitemu wewnętrznemu odbiciu, musi przy następnym trafieniu na powierzchnię kuli ulec takiemu odbiciu ponownie – natomiast po częściowym odbiciu (gdy kąt padania jest mniejszy od granicznego) ma następną „szansę” wydostania się i po wielu takich odbiciach wewnątrz kuli pozostanie dowolnie mała jego część.

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po 421 zadaniach

Mateusz Łącki	– Kraków		42,38
Tomasz Tkocz	– Rybnik		36,42
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice		32,79
Konrad Kapcia	– Częstochowa		32,13
Tomasz Rudny	– Warszawa		31,48
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	1 -	29,30
Tomasz Wietecha	– Tarnów	5 -	26,08
Jerzy Witkowski	– Radlin	1 -	26,07
Krzysztof Magiera	– Łosiów		18,64
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	2 -	17,01
Jacek Konieczny	– Poznań		15,22
Piotr Kumor	– Olsztyn		13,92
Piotr Ładyżyński	– Michalin		10,21
Ryszard Woźniak	– Kraków		9,35
Kazimierz Gryszko	– Gliwice		9,18
Radosław Poleski	– Kołobrzeg		8,65
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	7 -	8,62

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2004–2006 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 8 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44 F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (7), T. Wietecha (5), J. Łazuka, M. Wójcicki (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44F (alfabetycznie):
„dwukrotni”: J. Lipkowski, A. Nowogrodzki, P. Perkowski;
„jednokrotni”: A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, J. Piotrowski, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, P. Wach, J. Witkowski.

Do kilku zadań z ostatniego rocznika otrzymaliśmy od naszych Czytelników oryginalne rozwiązania i uzupełniające uwagi.

Zadanie **404** [Jak człowiek wyczuwa kierunek fali dźwiękowej w różnych zakresach częstotliwości] (współczynnik trudności $WT = 1{,}83$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 3$). Ciekawe szczegóły na temat zasady funkcjonowania tego zmysłu przekazali w swoich listach **A. Idzik** (na podstawie książki E. Ozimka *Dźwięk i jego percepcja*, PWN 2002) oraz **M. Łącki**. Nasi korespondenci podają m. in., że przy wysokich częstotliwościach istotne znaczenie ma kształt małżowiny usznej. Trzecie dobre rozwiązanie nadesłał **J. Witkowski**.

Zadanie **406** [Lewitacja szklanej kulki w pionowym strumieniu światła] ($WT = 2{,}84$, $LPR = 2$). Podana w numerze 3/2006 wartość natężenia światła jest 2 razy za duża, wskutek pomyłki. Poza tym przypuszczenie, że „całkę można obliczyć prawdopodobnie tylko numerycznie” okazało się niesłuszne, jak wykazał dr Jerzy Cisło z Uniwersytetu Wrocławskiego. Otrzymane przez niego wyrażenie analityczne jest jednak dość skomplikowane. Spośród uczestników naszej ligi dobre rozwiązania nadesłali **A. Idzik** i **M. Łącki** (oba z numerycznym obliczeniem całki).

Zadanie **408** [Współczynnik załamania szkła pryzmatu, z którego promień wybiega stycznie] ($WT = 1{,}26$, $LPR = 8$). Tu również istnieje rozwiązanie w postaci wzoru analitycznego, z czego skorzystali wszyscy uczestnicy tej serii zadań.

Zadanie **409** [Ciężar wisi na dwóch drutach, a przepływ prądu doprowadza do ich zetknięcia] ($WT = 2{,}99$, $LPR = 4$). Żadne z nadesłanych rozwiązań (**A. Idzika**, **J. Kelnera**, **T. Tkocza** i **J. Witkowskiego**) nie było zbliżone do „firmowego”, w którym autor analizował kształt drutów, pracowicie całkując równanie różniczkowe II stopnia. Nasi korespondenci uprościli ten kształt bardzo znacznie, i to w dowolny sposób (łamana albo łuk okręgu). Mimo to wszystkie oceny są dość wysokie, nawet wtedy, gdy przyjęto kształt w postaci dwóch odcinków prostoliniowych. Oto jedna z głównych różnic między zadaniem fizycznym a matematycznym: fizykowi wolno dokonywać wszelkich niezbędnych przybliżeń, o ile nie deformują one wyjściowego problemu w nadmiernym stopniu (cała sztuka polega na ocenie, jaki stopień jest dopuszczalny!). Zresztą, rozwiązanie firmowe też zawierało przybliżenie, gdyż dla każdego odcinka drutu oddziaływanie obliczano ze wzoru słusznego dla przewodników nieskończonych i równoległych. Czy istnieje rozwiązanie ścisłe i ogólne? Może tak, a może nie; ale nie ma to bardzo wielkiego znaczenia, jeśli wynik ma obowiązywać tylko w pewnym zadanym zakresie zmienności wszystkich parametrów.

Zadanie **412** [Dlaczego szampan się nie pieni podczas otwierania butelki przy usuwaniu osadu] ($WT = 2{,}75$, $LPR = 2$). Pan **K. Magiera** przedstawił wzorowe rozwiązanie tego zadania, uwzględniające wszystkie możliwe przyczyny, uszeregowane według ważności – w szczególności, pominiętą w rozwiązaniu firmowym, większą rozpuszczalność dwutlenku węgla w winie w niskiej temperaturze, a także ewentualne unieruchomienie butelki podczas jej otwierania „niekonsumpcyjnego”. Dalsze badania tych frapujących kwestii podsuwamy pasjonatom fizyki jako naukowy akcent świąt i uroczystości rodzinnych. . .
Drugie dobre rozwiązanie – **J. Witkowski**.

Zadanie **415** [Liczba operacji niezbędna do rozdzielenia mieszanki izotopów na frakcje] ($WT = 2{,}93$, $LPR = 3$). W rozwiązaniu firmowym odnotowana została rozbieżność pomiędzy liczbą operacji wynikającą z przyjętego algorytmu (1,4 mln) a liczbą wynikającą z porównania entropii (700 tys.). Na pytanie, czy ktoś z Czytelników skonstruuje lepszy algorytm, mamy odpowiedź pozytywną – według **J. Witkowskiego** „odkładanie na bok” dobrze wzbogaconych partii gwarantuje osiągnięcie celu już po 1,15 mln operacji. Pozostałe dobre rozwiązania – **A. Idzik** i **K. Magiera**.