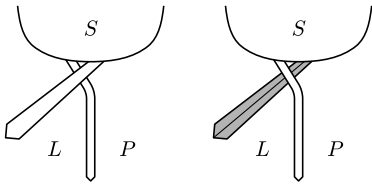


mała delta

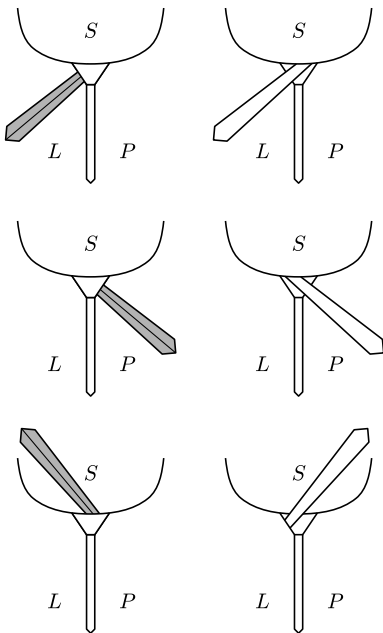
Węzły bliskie każdemu



Rys. 1

Z krawatami mamy do czynienia często, a temat ich wiązania nierzadko chcielibyśmy zbyć milczeniem. Jednak procesu wiązania tego niewielkiego paska materiału nie wolno bagatelizować. Nawet ignorując względy estetyczne, które – jak się później okaże – mają ścisły związek z obliczeniami, węzły krawatowe mogą być ciekawym obiektem badań dla matematyka.

Na początku należałoby określić, które węzły nazywać będziemy **krawatowymi**. Oczywiście, istnieje wiele wariantów łamiących poniższe reguły, lecz wszystkie rozważania matematyczne dotyczyć będą węzłów utworzonych zgodnie z następującymi zasadami:



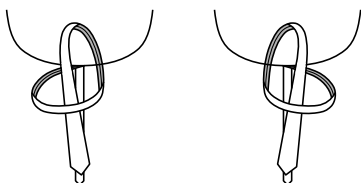
Rys. 2

1. Pierwszym krokiem jest ułożenie szerszego końca, którym będziemy wykonywać wszystkie ruchy podczas wiązania, na lewo, podczas gdy wąski wisi swobodnie (rys. 1). Jeśli przekładamy szerszy koniec nad wąskim, oba kierujemy gładką (reprezentacyjną) stroną na zewnątrz, jeśli zaś pod węższym, końcówki obracamy tak, by gładka strona obrócona była w kierunku koszuli. Dla matematycznej interpretacji nie ma to najmniejszego znaczenia, lecz w praktyce skutkuje to właściwą orientacją szerokiego końca krawata w gotowym węźle.

2. Otrzymujemy 3 strefy – lewą L , środkową S i prawą P . Teraz możemy wykonywać ruchy wewnątrz tego układu 3 stref. Oznaczamy je symbolem strefy, do której kierujemy końcówkę krawata. Możemy wykonywać ruchy od i do koszuli, co oznaczać będziemy indeksowaniem poszczególnych ruchów, odpowiednio \odot i \otimes . Dwoch kolejnych ruchów nie można skierować do tej samej strefy i nie mogą mieć tej samej orientacji. Zatem zbiór wszystkich ruchów to $\{L\odot, L\otimes, P\odot, P\otimes, S\odot, S\otimes\}$ (rys. 2).

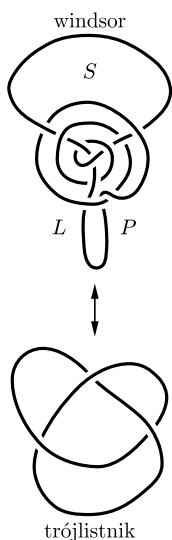
3. Końcową sekwencję tworzącą pętlę – potrzebną do ostatniego ruchu – tworzy się poprzez kolejne ruchy $P\odot L\otimes S\odot$ lub $L\odot P\otimes S\odot$.

4. Ostatnim ruchem jest przełożenie szerokiego końca przez utworzoną pętlę, tak by uzyskać charakterystyczny kształt węzła krawatowego (rys. 3). Ruch ten oznaczać będziemy przez T . Nie uwzględnia się go, gdy pytamy o **liczbę ruchów** prowadzących do danego węzła.

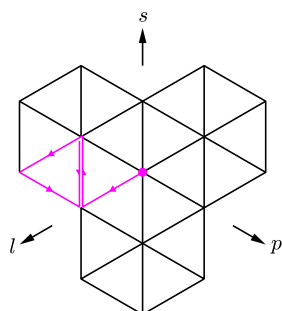


Rys. 3

Najprostszym węzłem jest tzw. węzeł orientalny, w którym pierwszy, odgórnie ustalony ruch jest zarazem pierwszym ruchem sztywnej sekwencji końcowej. Wiąże się go w 3 ruchach – $L\odot P\otimes S\odot T$. Inne



Rys. 4



Rys. 5

znane, przynajmniej ze słyszenia, węzły krawatowe to:

- prosty – 4 ruchy – $L \otimes P \odot L \otimes S \odot T$
- pratt – 5 ruchów – $L \odot S \otimes L \odot P \otimes S \odot T$
- windsor – 8 ruchów – $L \otimes S \odot P \otimes L \odot S \otimes P \odot L \otimes S \odot T$

Ze względu na skończoną długość krawata specjaliści uznali, że liczba ruchów przy wiązaniu węzła nie powinna przekraczać 9. Łącząc węzły z matematyką, można oczekiwać, że rezultatem będą rozważania dotyczące teorii węzłów. Tymczasem nic bardziej mylnego. Węzły krawatowe rozważane jako obiekty topologiczne (oczywiście po połączeniu wolnych końców) okazują się być w większości najprostszymi z węzłów – trywialnym, trójlistnym i ósemkowym (przykład rys. 4). Nie ukazują one różnicowania i nie dają nam dodatkowych informacji na temat ich własności.

Skoro klasyczna teoria węzłów nie jest dobrym językiem do opisu węzłów krawatowych, fizycy T. Fink i Y. Mao opracowali interpretację samego procesu wiązania krawatów jako błądzenia po sieci trójkątnej (rys. 5). Oś p, s, l wskazują strefy w czasie wiązania, a wektory jednostkowe $\vec{p}, \vec{s}, \vec{l}$ odpowiadają poszczególnym ruchom P, S, L . Na przykład, węzeł pratt odpowiada błądzeniu $\vec{l}\vec{s}\vec{l}\vec{p}\vec{s}$. O symbolach \otimes i \odot można na chwilę zapomnieć, bo to, jak należy wykonać pierwszy ruch, by na końcu otrzymać prawidłowo ułożony krawat, zależy tylko od liczby ruchów. Można teraz pokusić się o postawienie pewnego pytania.

Problem

Ile jest węzłów krawatowych?

Rozwiązanie

Oznaczmy przez $F_{\vec{p}}(n)$ liczbę błądzeń o długości n spełniających warunki węzła krawatowego i rozpoczynających się \vec{l} , a kończących \vec{p} . Analogicznie wprowadzamy oznaczenia $F_{\vec{s}}(n)$ i $F_{\vec{l}}(n)$. W każdym miejscu (prócz pierwszego ruchu – \vec{l}) wybieramy między dwoma ruchami, zatem

$$(1) \quad F_{\vec{p}}(n) + F_{\vec{s}}(n) + F_{\vec{l}}(n) = 2^{n-1}.$$

Zauważmy, że każdy ruch może zachodzić po dwóch innych, stąd

$$(2) \quad F_{\vec{l}}(n+2) = F_{\vec{s}}(n+1) + F_{\vec{p}}(n+1),$$

co zastosowane dwukrotnie daje nam

$$(3) \quad F_{\vec{l}}(n+2) = F_{\vec{p}}(n) + F_{\vec{s}}(n) + 2F_{\vec{l}}(n).$$

Analogiczna zależność zachodzi dla $F_{\vec{p}}(n+2)$, a w połączeniu z równością (1) dostajemy zależności rekurencyjne z oczywistymi warunkami początkowymi

$$(4) \quad F_{\vec{l}}(n+2) = 2^{n-1} + F_{\vec{l}}(n) \quad F_{\vec{l}}(1) = 1 \quad F_{\vec{l}}(2) = 0$$

$$(5) \quad F_{\vec{p}}(n+2) = 2^{n-1} + F_{\vec{p}}(n) \quad F_{\vec{p}}(1) = 0, \quad F_{\vec{p}}(2) = 1.$$

Jednakże jedyne możliwe sekwencje końcowe to $\vec{p}\vec{l}\vec{s}$ i $\vec{l}\vec{p}\vec{s}$, zatem interesuje nas suma

$$F_{\vec{p}}(r-2) + F_{\vec{l}}(r-2),$$

gdzie r to liczba ruchów. Wzór ogólny informujący o liczbie wszystkich węzłów krawatowych o $r > 1$ ruchach ma postać

$$(6) \quad F(r) = \frac{1}{3} (2^{r-2} - (-1)^{r-2}).$$

Dowód jego poprawności można przeprowadzić indukcyjnie na podstawie zależności (4) i (5). Stąd możemy dowiedzieć się, ile jest wszystkich węzłów krawatowych.

$$\sum_{r=2}^9 F(r) = 85.$$

Jednak nie wszystkie węzły spośród tych 85 są *ładne*. Niektóre mogą okazać się płaskie, inne niesymetryczne, a inne z kolei niekształtne. Na szczęście nie trzeba wiązać danego węzła, aby się o tym przekonać. Wystarczy wyliczyć wartości pewnych współczynników na podstawie znajomości sekwencji ruchów danego węzła.

Symetria zależy od różnicy między liczbą ruchów w lewo i w prawo. Aby węzeł był symetryczny, wartość wyrażenia

$$|\text{liczba ruchów } P - \text{liczba ruchów } L|$$

powinna być jak najmniejsza. Gdy ruchów w jedną stronę jest więcej, nietrudno sobie wyobrazić, że węzeł będzie po tej stronie grubszy.

Na **grubość** danego węzła mają wpływ ruchy do środka, zatem za współczynnik grubości węzła długości r uznawać będziemy

$$\frac{\text{liczba ruchów } S}{r}.$$

Według różnych źródeł ten stosunek powinien wynosić przynajmniej $\frac{1}{6}$ albo nawet $\frac{1}{4}$.

Ostatnim współczynnikiem jest **równowaga** określana w zależności od kolejnych kroków oplotu. Decyduje ona o utrzymywaniu właściwego kształtu.

Oznaczając σ_n jako n -ty krok błądzenia, definiujemy ω_n . Mianowicie $\omega_n(\sigma_n, \sigma_{n+1}) = 1$, gdy przejście $\sigma_n \rightarrow \sigma_{n+1}$ jest jednym z $\vec{s}\vec{r}$, $\vec{r}\vec{l}$, $\vec{l}\vec{s}$, a $\omega_n(\sigma_n, \sigma_{n+1}) = -1$ w przeciwnym przypadku. Aby węzeł był możliwie najbardziej zrównoważony, wartość wyrażenia

$$\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{r-1} |\omega_n - \omega_{n-1}|$$

powinna być najmniejsza. Wyliczenie powyższych współczynników, przez podstawienie odpowiednich danych do wzorów, nie powinno nastęrczać poważniejszych kłopotów. Dzięki temu możemy dowiedzieć się, między innymi, że bodaj najsłynniejszy węzeł krawatowy – windsor wcale nie jest idealny. Istnieją 3 węzły o równowadze i symetrii równych 0 – orientalny, półwindsor i hanover. Są to 1, 2 i 3 razy powtórzone te same sekwencje $\vec{l}\vec{p}\vec{s}$. Warto zaznaczyć, że formalne dołączenie węzła hanover do rodziny węzłów krawatowych jest właśnie rezultatem matematycznych rozważań na temat własności tych węzłów.

Wiążąc krawat, mogliśmy zauważyć, że czasem po wyciągnięciu wąskiego końca z węzła na krawacie pozostaje węzeł, a czasem nie. Od czego zależy stan zawężenia danego węzła po wyjęciu wąskiego końca? To pytanie zostawiamy już Czytelnikom.

Literatura

- [1] T. Fink, Y. Mao, *Designing tie knots by random walks*, Nature **398** (4 III 1999) 31–32.
 [2] T. Fink, Y. Mao, *Tie knots, random walks and topology*, Physica A **276** (2000) 109–121.

Małą Deltę przygotował Maciej PAJĄK
 Pracownia Matematyki Pałacu Młodzieży w Katowicach

