Przewodnictwo cieplne

Jerzy GINTER *

Bezustannie stykamy się w życiu codziennym z przewodzeniem energii cieplnej przez najróżniejsze przedmioty: garnek postawiony na gazie czy łyżeczkę zanurzoną w herbacie. Przykłady można byłoby oczywiście dowolnie mnożyć. W każdym z takich przypadków można by zapytać, jak temperatura w różnych miejscach rozważanego ciała zależy od czasu. W ogólnym przypadku odpowiedź na takie pytanie byłaby trudna, ograniczmy się więc do najprostszego przypadku „jednowymiarowego”: długiego i cienkiego pręta o stałym przekroju z jednorodnego materiału. Będziemy przy tym zakładać, że energia płynie wzdłuż pręta i nie ma strat „na boki” – co jest pewną idealizacją sytuacji rzeczywistych.

Równanie przewodnictwa cieplnego

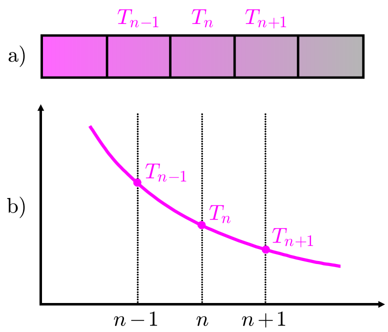
Rozważmy taki właśnie pręt. Aby móc prowadzić rozumowanie, podzielmy go myślowo na N fragmentów o jednakowej długości (rys. 1a).

Przypuśćmy dalej, że w chwili t_i rozkład temperatury T przedstawia wykres 1b (symbol i numeruje kolejne chwile, odległe o Δt). Symbol T oznacza temperaturę w skali Celsjusza (użyliśmy dużej litery T, bo t małe oznacza czas).

Co możemy powiedzieć o przepływie energii w tym pręcie? Średnia temperatura elementu $n-1$, czyli T_{n-1}, jest wyższa od temperatury elementu n, czyli T_n. Zatem przez lewą granicę elementu n energia wpływa do jego wnętrza. Energia, która przepłynie w krótkim czasie Δt, jest proporcjonalna do różnicy temperatur elementów:

$$\Delta E_L = a(T_{n-1} - T_n). \tag{1}$$

O taką wartość wzrasta energia zawarta w elemencie n. Współczynnik a zależy od geometrycznych rozmiarów elementów i jest proporcjonalny do przewodnictwa cieplnego materiału. Nie będziemy tego jednak omawiać szczegółowo.



Rys. 1. Rozkład temperatury w pręcie.

Przez prawą granicę elementu n wypłynie w tym samym czasie Δt porcja energii równa:

$$\Delta E_P = a(T_n - T_{n+1}). \tag{2}$$

Zatem zmiana energii elementu n, wywołana przepływami przez obie granice, jest równa:

$$\Delta E_n = \Delta E_L - \Delta E_P = a(T_{n-1} - T_n) - a(T_n - T_{n+1}) = \\ = a(T_{n-1} + T_{n+1} - 2T_n). \tag{3}$$

Zauważmy od razu: ΔE_n byłoby równe zeru, gdyby różnica temperatur $T_n - T_{n+1}$ była równa różnicy temperatur $T_{n-1} - T_n$. Tyle samo energii wypływałoby przez prawą granicę, ile wpływa przez granicę lewą. Energia elementu n zmienia się w czasie wtedy, kiedy zależność temperatury T_n od położenia n jest nieliniowa.

Jeżeli pewna energia ΔE_n „netto” dostanie się do elementu n, wzrośnie temperatura tego elementu. Można z dobrą dokładnością przyjąć, że przyrost temperatury ΔT_n jest proporcjonalny do ΔE_n i napisać:

$$\Delta T_n = b\Delta E_n. \tag{4}$$

Współczynnik b zależy od geometrycznych rozmiarów elementu, jego masy i – odwrotnie proporcjonalnie – od ciepła właściwego materiału.

Łącząc (3) i (4) dostajemy **równanie przewodnictwa cieplnego** (w formie „dyskretnej”):

$$\Delta T_n = c(T_{n-1} + T_{n+1} - 2T_n); \tag{5}$$

symbolem c oznaczyliśmy iloczyn stałych a i b.

Stan ustalony polega na tym, że temperatura we wszystkich punktach przestaje zależeć od czasu, czyli $\Delta T_n = 0$. Ze wzoru (5) wynika, że w takim stanie zależność T od n musi być zależnością liniową. W szczególności może to odpowiadać funkcji stałej.

Analityczny opis zagadnienia

Analityczny opis zagadnienia wymaga „uciąglenia” naszego równania. Trzeba wprowadzić funkcję dwóch zmiennych – położenia x i czasu t – czyli $T(x,t)$. Następnie:

1. człon ΔT_n należy zastąpić czasową pochodną funkcji $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$;

2. człon $(T_{n-1} + T_{n+1} - 2T_n)$ zastąpić drugą pochodną przestrzenną $\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$ (por. rozważania w artykule *Trzeba podleźć..., Delta* 01/2006.).

Prowadzi to do „prawdziwego” równania przewodnictwa cieplnego

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2};$$

w którym κ oznacza współczynnik przewodnictwa cieplnego, c ciepło właściwe substancji, a ρ jej gęstość.

Rozwiązywanie analityczne równania tego rodzaju jest dość skomplikowane. Na początku XIX wieku Jean Fourier stworzył w tym celu dział matematyki, nazywany obecnie „analizą fourierowską”.

Opis numeryczny

Tutaj zajmiemy się jedynie rozwiązaniami numerycznymi. Przypuśćmy, że znamy dla czasu t_i wielkości $T_{n-1}(t_i)$, $T_{n+1}(t_i)$ i $T_n(t_i)$. Wielkość $T_n(t_{i+1})$ obliczymy, stosując algorytm, wynikający ze wzoru (5):

$$T_n(t_{i+1}) = T_n(t_i) + c[T_{n-1}(t_i) + T_{n+1}(t_i) - 2T_n(t_i)]. \tag{6}$$

Obliczenia należy rozpocząć, zadając w sposób dowolny dla $t_0 = 0$ zbiór wielkości $T_n(0)$. Następnie obliczamy następne zestawy wartości, stosując wzór (6).

Konkretne obliczenia znajdują się na stronie internetowej *Delty* w pliku *Przewodnictwo cieplne*. Tu przytoczymy tylko wyniki.

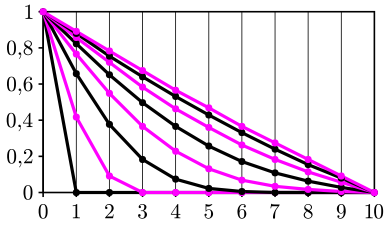
*Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

Warunki brzegowe 1, ustalona temperatura na końcach pręta

Dodatkowo trzeba określić, co dzieje się na granicach obszaru, bo do tych punktów wzór (6) nie może być zastosowany (na przykład dla $n = 0$ nie ma elementu -1). Na początku rozważymy przykłady, w których ustalona jest temperatura na końcach pręta, czyli – w naszym modelu – w elementach 0 i N.

Przykład 1

Rozważmy długi pręt, który początkowo miał temperaturę równą zeru. Reprezentować go będzie 11 punktów, numerowanych od 0 do 10. Zakładać będziemy, że prawy koniec pręta stale jest utrzymywany w temperaturze zerowej, co modelujemy, narzucając dla wszystkich czasów $T_{10} = 0$. W chwili $t = 0$ pręt ten zetknął się z dużym ciałem o temperaturze równej 1, co modelujemy, narzucając dla wszystkich czasów $T_0 = 1$. Określiliśmy w ten sposób wspomniane powyżej warunki brzegowe. W obliczeniach przyjęty został parametr $c = 0{,}3$. Pytamy, jak zmieniać się będzie w czasie temperatura poszczególnych fragmentów pręta.

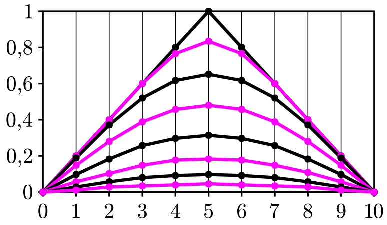


Rys. 2. W chwili początkowej temperatura w pręcie zmieniała się w zależności od n skokowo. Krzywe odpowiadają czasom $t_i = 0, 2, 8, 18, 32, 50, 72$ i 98.

Wyniki obliczeń przedstawia rysunek 2 (arkusz *Skok*). Narysowanych zostało sześć wykresów, dla czasów 0, 2, 8, 18, 32, 50, 72 i 98 ($2n^2$). Widać stopniowe przejście od stanu początkowego do stanu ustalonego, odpowiadającego liniowej zależności temperatury T od położenia n.

Przykład 2

Przykład ten odpowiada innej sytuacji: oba końce pręta mają stale temperaturę równą zeru. Natomiast środek pręta podgrzewany był małym piecykiem tak długo, aż w obu połówkach ustalił się stan stacjonarny. W chwili $t = 0$ piecyk wyłączono. Pytamy: jak pręt będzie osiągał stan ustalony, w którym temperatura wszędzie będzie równa zeru?



Rys. 3. Trójkątny rozkład temperatury w chwili początkowej. Krzywe odpowiadają czasom $t_i = 0, 2, 8, 18, 32, 50, 72$ i 98.

Wyniki obliczeń na identycznej, jak w przykładzie 1, siatce punktów przedstawia rysunek 3 (arkusz *Trójkąt*). Narysowanych zostało osiem wykresów, dla tych samych czasów, co poprzednio. Temperatura w całym pręcie stopniowo się obniża. Widać też, że dla dość dużych – ale nie nieskończonych – czasów wykres zależności temperatury T od położenia n jest fragmentem sinusoidy. Nie jest to przypadek, ale na naszym poziomie trudno byłoby to uzasadnić.

Warunki brzegowe 2, układ izolowany termicznie

Jeżeli układ jest izolowany i nie wymienia energii z otoczeniem, warunki brzegowe musimy zmodyfikować. Do elementu 0 energia dopływa tylko z prawej strony, od elementu 1. Możemy więc napisać (por. wzór (1)).

$$\Delta E_0 = a(T_1 - T_0).$$

Łącząc to z wyrażeniem (4) i stosując identyczne rozumowanie jak poprzednio, dostajemy algorytm

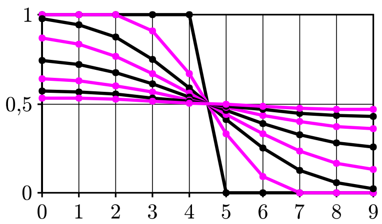
$$T_0(t_{i+1}) = T_0(t_i) + c[T_1(t_i) - T_0(t_i)].$$

Podobnie – do skrajnego prawego elementu o liczbie N energia dociera tylko z lewej strony. Stąd:

$$T_N(t_{i+1}) = T_N(t_i) + c[T_{N-1}(t_i) - T_N(t_i)].$$

Przykład 3

Jako przykład układu izolowanego rozważmy sytuację, w której w chwili $t = 0$ lewa połowa pręta ma temperaturę $T = 1$, a prawa temperaturę $T = 0$. Można sobie wyobrazić, że w chwili $t = 0$ zetknięto dwa identyczne pręty, ale o różnych temperaturach. Obliczenia zawarte są w arkuszu *2 Pręty* (rys. 4).



Rys. 4. Wyrównanie temperatur w układzie izolowanym. Krzywe odpowiadają czasom $t_i = 0, 2, 8, 18, 32, 50, 72$ i 98.

Widać, że w układzie zachodzi wyrównanie temperatur. W granicy $t \to \infty$ temperatura wszędzie będzie jednakowa i równa 0,5.

Widać także, że dla dostatecznie długich czasów funkcja, opisująca zależność T_n od n, jest fragmentem sinusoidy – podobnie, jak w przykładzie 2.

Zadanie domowe

Zmodyfikuj warunki początkowe w arkuszu *Trójkąt*. Niech dla $t = 0$ temperatura będzie równa zeru wszędzie, z wyjątkiem punktu środkowego, dla którego $T_5(0) = 1$. Propozycja: w obliczeniach zmniejsz c do 0,05. Jak można byłoby podobną sytuację uzyskać w prawdziwym pręcie?