Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 2007

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **521** ($WT = 2{,}23$) i **522** ($WT = 1{,}30$) z numeru 5/2006

Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	43,55
Michał Kieza	– Warszawa	41,38
Michał Jastrzębski	– Warszawa	39,81
Jerzy Cisło	– Wrocław	39,34
Łukasz Garncarek	– Opole	36,81
Piotr Kumor	– Olsztyn	34,47
Krzysztof Kamiński	– Pabianice	34,14
Dariusz Kurpiel	– Posada Zarszyn	33,44
Krzysztof Dorobisz	– Kraków	33,20

Zadania z matematyki nr 533, 534

Redaguje Marcin E. KUCZMA

533. Ostrosłup ścięty prawidłowy ma kulę wpisaną (styczną do wszystkich ścian) oraz kulę półwpisaną (styczną do wszystkich krawędzi). Wyznaczyć liczbę wierzchołków oraz skalę podobieństwa podstaw ostrosłupa.

534. Czy istnieje taka funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wykres funkcji $f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n-krotnej iteracji funkcji f) przechodzi przez dokładnie n punktów kratowych (tj. punktów o obu współrzędnych całkowitych)?

Zadanie 534 zaproponował pan Michał Kremzer z Gliwic.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/2006

Przypominamy treść zadań:

525. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c, d, e układ równań

$$a = c^2 + d^2, \quad b = d^2 + e^2, \quad c = e^2 + a^2, \quad d = a^2 + b^2, \quad e = b^2 + c^2$$

526. Ile jest par przekątnych rozłącznych w n-kącie foremnym? (Przekątne rozłączne – nieprzecinające się wewnątrz wielokąta i niemające wspólnego końca).

525. Niech a, b, c, d, e będą liczbami spełniającymi podany układ; jasne, że są to liczby nieujemne. Ich suma jest równa podwojonej sumie ich kwadratów. W myśl nierówności Cauchy'ego–Schwarza,

$$(a+b+c+d+e)^2 \leqslant 5(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2) = \\ = \tfrac{5}{2}(a+b+c+d+e).$$

Stąd $2(a+b+c+d+e) \leqslant 5$ i wobec tego pewne dwie sąsiednie liczby w ciągu (a, b, c, d, e, a) mają sumę niewiększą od 1. Przyjmijmy bez straty ogólności, że $b + c \leqslant 1$.

Odejmując stronami pierwsze i czwarte równanie układu oraz drugie i trzecie równanie, dostajemy zależności

$$a - d = c^2 + d^2 - a^2 - b^2, \qquad b - c = d^2 - a^2,$$

z których wynika równość

$$(a-d)(1+a+d) = c^2 - b^2 = (b+c)(a^2-d^2),$$

czyli

$$(a-d)[(1+a+d) - (b+c)(a+d)] = 0.$$

W nawiasie kwadratowym znajduje się liczba $1 + (a+d)(1-b-c) \geqslant 1$. Zatem $a = d$. Stąd od razu $b = c$. To sprowadza układ równań do następującego:

$$(*) \qquad a = a^2 + c^2, \quad c = a^2 + 4c^4, \quad e = 2c^2.$$

Tak więc

$$a = c^2 + (c - 4c^4),$$

co po podstawieniu do któregokolwiek z pierwszych dwóch równań układu $(*)$ wnet daje równanie

$$c(2c-1)(8c^6 + 4c^5 - 2c^4 - 5c^3 + c + 1) = 0.$$

Wielomian w ostatnim nawiasie przyjmuje dla $c \geqslant 0$ wartości dodatnie; można to uzasadnić różnymi sposobami – na przykład zapisując go w postaci

$$\tfrac{11}{2}c^6 + 2c^2(c^2-1)^2 + \tfrac{1}{2}(c^3-1)^2 + (c+\tfrac{1}{2})(2c^2-1)^2.$$

W takim razie $c = 0$ lub $c = \frac{1}{2}$. Po podstawieniu do układu $(*)$ otrzymujemy w pierwszym przypadku $a = e = 0$, a w drugim $a = e = \frac{1}{2}$.

Otrzymujemy piątki liczb $(0,0,0,0,0)$ oraz $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ jako możliwe rozwiązania wyjściowego układu równań i sprawdzamy, że istotnie są one rozwiązaniami.

526. Wielokąt wypukły o n wierzchołkach ma $m = \frac{1}{2}n(n-3)$ przekątnych. Liczba wszystkich par przekątnych wynosi

$$M = \binom{m}{2} = \frac{n(n-3)(n^2-3n-2)}{8}.$$

Od tego trzeba odliczyć pary przekątnych (w liczbie K) przecinających się wewnątrz wielokąta oraz pary przekątnych (w liczbie L) mających wspólny koniec.

Każda czwórka wierzchołków wyznacza dokładnie jedną parę przekątnych przecinających się w punkcie wewnętrznym; zatem $K = \binom{n}{4}$. Każdy wierzchołek jest wspólnym końcem $\binom{n-3}{2}$ par przekątnych; zatem $L = n \cdot \binom{n-3}{2}$. Stąd ostateczny wynik (postać po uproszczeniu):

$$M - K - L = \frac{n(n-3)(n-4)(n-5)}{12}.$$

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2007

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
420 ($WT = 1{,}75$) i **421** ($WT = 2{,}09$)
z numeru 6/2006

Mateusz Łącki	– Kraków	42,38
Tomasz Tkocz	– Rybnik	36,42
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	32,79
Konrad Kapcia	– Częstochowa	32,13
Tomasz Wietecha	– Tarnów	26,08
Jerzy Witkowski	– Radlin	26,07
Krzysztof Magiera	– Łosiów	18,64
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	17,01

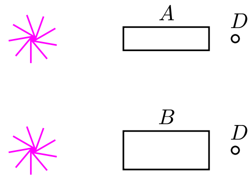
Zadania z fizyki nr 430, 431

Redaguje Jerzy B. BROJAN

430. Oto fragment artykułu z gazety codziennej, dotyczący możliwości bezpośredniej obserwacji planet pozasłonecznych metodą zasłonięcia gwiazdy (której światło jest znacznie silniejsze):

… satelita… rozwinie parasol o średnicy 30–50 m, który posłuży za przesłonę dla teleskopu. Żeby skutecznie wyeliminować światło gwiazdy docierające z odległości kilkudziesięciu lat świetlnych i równocześnie umożliwić obserwację układu planetarnego tej gwiazdy, przesłona musi znajdować się kilkadziesiąt tysięcy kilometrów przed teleskopem.

Skąd wynikają podane wyżej wartości średnicy przesłony i jej odległości? Czy nie mogłaby być ona np. 10 razy mniejsza i znajdować się odpowiednio bliżej? Przyjąć, że układ planetarny jest podobny do Układu Słonecznego, a obserwowany jest w świetle widzialnym.

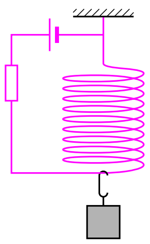


431. Na osi betonowego walca A w dużej odległości od niego znajduje się małe źródło promieniowania gamma, a za walcem znajduje się detektor promieniowania D. Drugi z narysowanych układów różni się od pierwszego tylko większą grubością walca B. Okazało się, że natężenia promieniowania zmierzone przez detektory nie były jednakowe. Który z detektorów wskazywał większe natężenie promieniowania i dlaczego?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2006

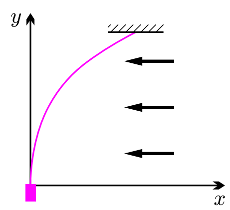
Przypominamy treść zadań:

422. Na nieważkim sznurku o długości $l = 1$ m wisi ciężarek o masie $m = 100$ g. Wieje wiatr, który na każdy odcinek sznurka o długości ds działa poziomo skierowaną siłą o wartości $\mathrm{d}F = f\,\mathrm{d}s$, gdzie $f = 0{,}8$ N/m. O ile odchyla się ciężarek pod wpływem wiatru? Pytanie dotyczy poziomej składowej przesunięcia w stanie równowagi.



423. Ciężarek zawieszono na sprężynie z drutu metalowego, która jest częścią obwodu elektrycznego prądu stałego (rysunek obok). Czy natężenie prądu w obwodzie pozostanie stałe, gdy wprawimy ciężarek w drgania pionowe? Jeśli nie, to w których momentach będzie ono największe, a w których najmniejsze? Wystarczy odpowiedź jakościowa, dla niewielkiej amplitudy drgań.

422. Oznaczmy składową poziomą siły napięcia sznurka przez F_x, pionową przez F_y, a sam sznurek przedstawmy na wykresie $x - y$ (rys.).



Ponieważ sznurek jest wiotki, więc siła napięcia musi być w każdym punkcie do niego równoległa, tzn.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{F_y}{F_x}.$$

Składowa F_y jest stała i równa mg, natomiast składowa F_x rośnie „w górę” sznurka zgodnie z równaniem $\mathrm{d}F_x = f\mathrm{d}s$, czyli $F_x = fs$, gdzie s jest zmienną – długością sznurka od danego punktu do ciężarka. Po podstawieniu $\mathrm{d}y = \sqrt{\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}x^2}$ otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + \left(\frac{mg}{fs}\right)^2}.$$

Rozwiązaniem (spełniającym warunek $x = 0$ dla $s = 0$) jest funkcja $x(s) = \sqrt{s^2 + (mg/f)^2} - mg/f$. Podstawiając $s = l$, obliczamy szukaną wartość przesunięcia poziomego $x = 0{,}356$ m. Można wykazać, że funkcja $x(y)$ jest cosinusem hiperbolicznym, czyli sznurek tworzy „położoną na boku” krzywą łańcuchową.

423. Wydłużenie sprężyny zmniejsza jej indukcyjność L, a przy ustalonym natężeniu prądu elektrycznego zmniejszeniu ulegałby też wartość strumienia indukcji magnetycznej $\Phi = LI$. Zgodnie z regułą Lenza powstająca siła elektromotoryczna indukcji powoduje zatem zwiększenie natężenia prądu. Dokładniejsza analiza wymaga podstawienia wyrażeń

$$L = L_0 + L_1 \sin\omega t, \qquad I = I_0 + I_1 \sin(\omega t + \varphi)$$

do równania

$$\mathcal{E} = RI + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(LI).$$

Podana wyżej postać zależności natężenia prądu od czasu jest poprawnym rozwiązaniem równania tylko w przypadku małych L_1 i I_1. Okazuje się, że jeśli stała czasowa obwodu $\tau = L/R$ jest znacznie krótsza od okresu drgań ciężarka T, to maksymalny wzrost natężenia prądu wystąpi w chwili, gdy szybkość ruchu ciężarka w dół będzie największa (podczas przejścia przez położenie równowagi). W przeciwnym skrajnym przypadku $\tau \gg T$ natężenie prądu będzie rosło tak długo, jak długo sprężyna będzie się wydłużała, osiągając maksymalną wartość w chwili zatrzymania się ciężarka w dolnym położeniu. Gdy wielkości τ i T są porównywalne, przesunięcie fazy φ ma wartość pośrednią między 0 a $\pi/2$. Oczywiście, minimum natężenia prądu będzie w każdym przypadku przesunięte o pół okresu względem maksimum.