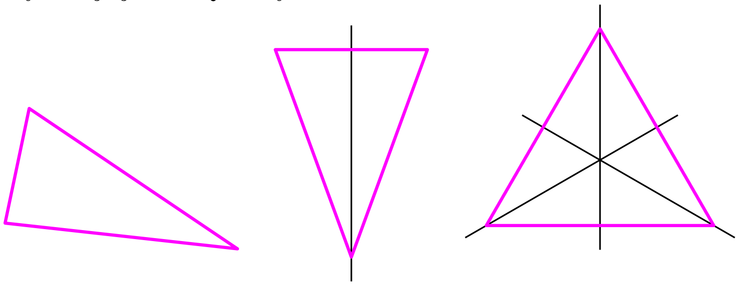
Na ile sposobów można leżeć na swoim obrysie?

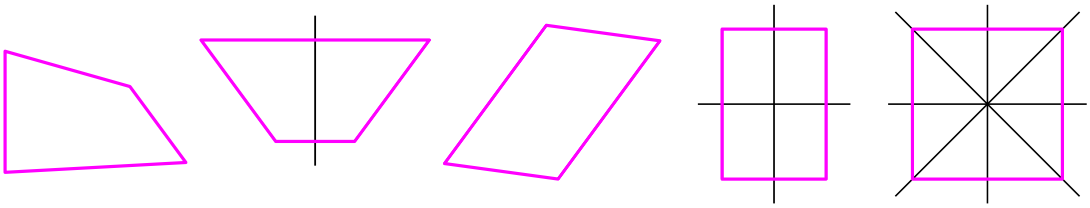
Obrysujmy położony na kartce trójkąt wycięty z tekturki. Na ile sposobów można ten trójkąt położyć na jego obrysie? Oczywiście, zależy to od trójkąta. Trójkąt „byle jaki” można położyć na obrysie tylko na jeden sposób, równoramienny na dwa sposoby: tak jak leżał, albo też obracając go na drugą stronę względem jego osi symetrii. Trójkąt równoboczny da się położyć na swoim obrysie na sześć sposobów. Różnych sytuacji jest więc trzy.



1+0 1+1 3+3

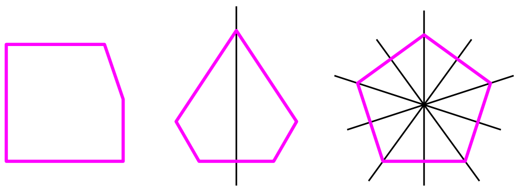
Symbole napisane pod rysunkami wskazują, ile jest położeń bez odwracania na drugą stronę i ile z odwracaniem.

Dla czworokąta różnych sytuacji będzie pięć



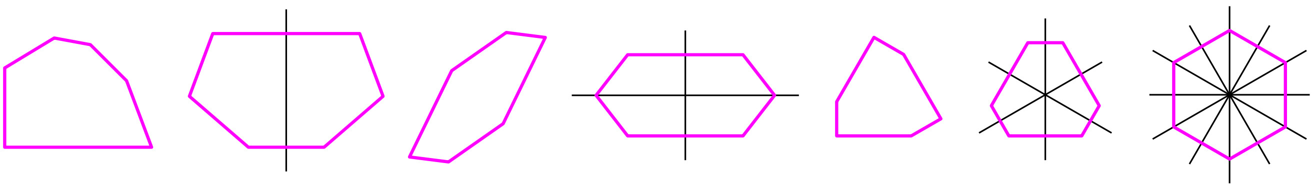
1+0 1+1 2+0 2+2 4+4

dla pięciokąta znów trzy



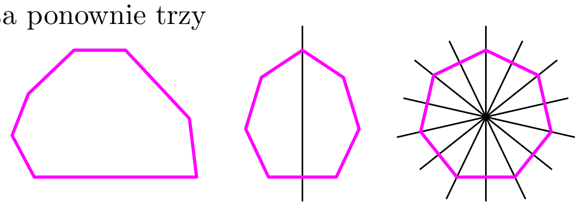
1+0 1+1 5+5

dla sześciokąta siedem



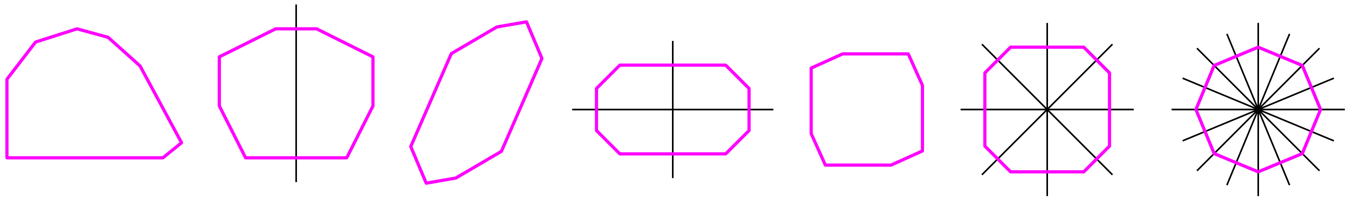
1+0 1+1 2+0 2+2 3+0 3+3 6+6

dla siedmiokąta ponownie trzy



1+0 1+1 7+7

dla ośmiokąta ponownie siedem



1+0 1+1 2+0 2+2 4+0 4+4 8+8

Zastanówmy się, jaka funkcja opisuje liczbę różnych sytuacji:

$$3 \to 3,\quad 4 \to 5,\quad 5 \to 3,\quad 6 \to 7,\quad 7 \to 3,\quad 8 \to 7, \ldots ?$$

Jak zgadnąć, co jest dalej?

Aby odpowiedzieć na te pytania, trzeba poczynić kilka obserwacji. Np.
- położenia bez odwracania to obroty (razem z tym o $0°$), ile ich jest, opisuje pierwsza liczba;
- położenia z odwróceniem na lewą stronę to symetrie osiowe, ile ich jest, opisuje druga liczba;
- jeśli są osie symetrii, to jest ich tyle, ile obrotów;
- jeśli obrotów jest tyle, ile boków ma wielokąt, to wtedy muszą być osie symetrii;
- wszystkie niezerowe wypisane liczby to dzielniki liczby boków wielokąta.

Pozostawiając Czytelnikom przyjemność uzasadnienia pierwszych czterech spostrzeżeń, spróbujmy uzasadnić piąte.

Dowodzone spostrzeżenie w istocie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Lagrange'a o rzędzie podgrupy, ale to już inna historia.

Przyjrzyjmy się n-kątowi, który można nałożyć na jego obrys przez k obrotów (z zerowym włącznie). Weźmy A, jeden z jego wierzchołków – obroty przeprowadzają go na k różnych wierzchołków obrysu (z nim włącznie). Jeśli zostały jeszcze jakieś wolne wierzchołki, to weźmy B, jeden z nich. On także jest przeprowadzany na k różnych wierzchołków, co więcej – różnych od wszystkich miejsc, w jakie mógł trafić wierzchołek A. Jeśli jeszcze pozostały jakieś wolne wierzchołki, to… i tak powtarzamy opisaną operację, angażując coraz więcej wierzchołków – za każdym razem dołączamy nowe k z nich. Ale n jest liczbą skończoną, więc po m krokach zasób wolnych wierzchołków się wyczerpie. Oznaczać to będzie, że $n = k \cdot m$, czego mieliśmy dowieść.

Gdy wszystkie wyliczone spostrzeżenia uzasadnimy, natychmiast odgadniemy, co to za funkcja pojawiła się w naszym doświadczeniu:

Ambitnym Czytelnikom polecam zbadanie sytuacji dla wielościanów. Uprzedzam jednak, że tam obok obrotów i symetrii pojawiają się jeszcze inne przekształcenia, co można zobaczyć, np. obserwując wszystkie z 24 sposobów, na jakie czworościan foremny (również „obracany na nice") można umieścić w zajmowanym przez niego miejscu.

jeśli k jest liczbą dodatnich dzielników liczby n, to liczba różnych sytuacji, jakie można napotkać, kładąc n-kąt na jego obrysie, jest równa $2k - 1$.

Istotnie, różnych liczebności obrotów jest k i każdej z nich – oprócz n – odpowiada sytuacja, w której są same obroty oraz gdy są obroty i symetrie.

Teraz bez trudu możemy obliczyć, że dla 12-kątów różnych sytuacji jest możliwych 11 (jako że 12 dzieli się przez 1, 2, 3, 4, 6 i 12) – proszę zaprojektować i narysować dwunastokąty odpowiadające każdej z tych sytuacji.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS