Metoda probabilistyczna

Rafał LATAŁA *

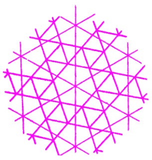
Jak pokazać, że istnieje obiekt o pewnych własnościach? Najprościej jest podać bezpośrednią konstrukcję, jednak często jest to bardzo trudne (a czasem w ogóle niewykonalne). Jednym ze sposobów ominięcia tego problemu jest tak zwana metoda probabilistyczna. Polega ona na tym, że w celu wykazania, iż zbiór poszukiwanych obiektów jest niepusty, dowodzimy, że ma dodatnie prawdopodobieństwo. W praktyce często się wykazuje, że to prawdopodobieństwo jest bliskie 1, czyli „typowy” obiekt ma poszukiwaną własność.

Spróbujmy na początek dowieść istnienia funkcji ciągłej na pewnym przedziale i nieróżniczkowalnej w żadnym punkcie dziedziny. W tym przypadku można podać wzór, jednak nie będzie on ani łatwy do zweryfikowania, ani specjalnie przyjemny. Prościej jest zauważyć, że takie funkcje są znane każdemu probabiliście – to trajektorie procesu Wienera. Okazuje się, że wszystkie są ciągłe, a z prawdopodobieństwem 1 nigdzie nieróżniczkowalne.

Twierdzenie van der Waerdena mówi, że dla $N \geqslant N(k)$ taki podział nie istnieje. Optymalne wartości $N(k)$, znane tylko dla małych k, to $N(2) = 3$, $N(3) = 9$, $N(4) = 35$ i $N(5) = 178$. Rozumowanie obok pokazuje, że $N(k) > 2^{k/2}$.

Rozważmy następujący problem: dla jakich N i $k \geqslant 2$ zbiór $I = \{1, \ldots, N\}$ da się podzielić na dwa podzbiory A i B, z których żaden nie zawiera k-elementowego podciągu arytmetycznego? Dokładna odpowiedź na to pytanie nie jest znana, wykażemy tutaj, że dla $N \leqslant 2^{k/2}$ taki podział istnieje. Rozważmy losowy podział – wyobraźmy sobie, że rzucamy N symetrycznymi monetami i jeśli na i-tej monecie wypadł orzeł, to liczbę i przydzielamy do zbioru A, a jeśli reszka, to do zbioru B. Prawdopodobieństwo tego, że *ustalony* ciąg arytmetyczny $n_1, \ldots, n_k$ jest zawarty w zbiorze A, wynosi 2^{-k}. Wszystkich k elementowych ciągów arytmetycznych o wartościach w I jest mniej niż $N^2/2$, stąd prawdopodobieństwo tego, że A zawiera *pewien* ciąg arytmetyczny długości k, jest mniejsze niż $2^{-k}N^2/2 \leqslant 1/2$. Podobnie możemy rozumować dla zbioru B. Czyli z dodatnim prawdopodobieństwem oba zbiory A i B nie zawierają ciągu arytmetycznego! Ambitny Czytelnik może spróbować skonstruować deterministyczny podział, np. dla $k = 100$.

W podanym wyżej przykładzie moglibyśmy jeszcze obejść się bez rachunku prawdopodobieństwa, wykorzystując tylko zliczanie elementów. Jednak w bardziej zaawansowanych problemach jest to niemożliwe. Obszerny i burzliwie rozwijający się dział kombinatoryki poświęcony jest badaniu grafów losowych. Tutaj konstrukcje probabilistyczne prowadzą do budowania grafów o rozmaitych ciekawych własnościach. Grafów o podobnych własnościach w wielu przypadkach nie można opisać w bezpośredni sposób. Najciekawsze konstrukcje bazują na podejściu łączącym elementy losowe i deterministyczne.



z parkietażu trójkątnego można też uzyskać (3, 3, 3, 3, 6)

Metoda losowa znajduje zastosowanie nie tylko w kombinatoryce. Za jej pomocą Dvoretzky wykazał zaskakujące twierdzenie dotyczące wysokowymiarowych ciał wypukłych. Mianowicie, każdy n-wymiarowy, środkowosymetryczny wielościan ma co najmniej $\lceil \log n \rceil$-wymiarowy centralny przekrój bliski kuli (tzn. stosunek promieni kuli wpisanej i opisanej na tym przekroju jest nieduży). Podobnie każdy n-wymiarowy wielościan ma prawie kulisty k-wymiarowy rzut. Co więcej, dla wielu brył można znacząco zwiększyć wymiar takiego przekroju czy rzutu. Kashin wykazał, że losowy $\lceil n/2 \rceil$-wymiarowy rzut n-wymiarowej kostki jest z ogromnym prawdopodobieństwem bliski kuli. Jednak, mimo że wiadomo, iż rzuty kostki na „typową” $\lceil n/2 \rceil$ wymiarową przestrzeń są kuliste, nie jest do dzisiejszego dnia znana żadna deterministyczna konstrukcja takich rzutów.

Pisał o tym Paweł Strzelecki w *Delcie* 4/2005.

Argumenty losowe są obecne również w dowodzie niedawno wykazanego przez Greena i Tao twierdzenia, mówiącego, że istnieją dowolnie długie ciągi arytmetyczne złożone z liczb pierwszych.

Powyższa lista, mimo iż bardzo wybiórcza, powinna zasygnalizować Czytelnikowi, że losowe konstrukcje coraz częściej występują w dowodach rezultatów z kombinatoryki, analizy, geometrii czy teorii liczb. Są także inne ważne, niekonstruktywne sposoby dowodzenia, że zbiory są duże, np. z użyciem aparatu topologicznego zamiast probabilistycznego. Ale to temat na inną opowieść.

*Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski