Symbole Newtona jako funkcje wielomianowe

Włodzimierz HOLSZTYŃSKI

Wszędobylskie symbole Newtona występują intensywnie w następujących działach matematyki (spośród tych, z których zdaję sobie sprawę): w algebrze, teorii aproksymacji, kombinatoryce, teorii kodów poprawiających błędy, przetwarzaniu sygnału i obrazu, analizie matematycznej, teorii liczb, rachunku prawdopodobieństwa i statystyce. Można je znaleźć w niezliczonych twierdzeniach, formułach, tożsamościach i nierównościach. Te z pozoru przypadkowe wystąpienia mogą nawet powodować uczucie pewnego zagubienia. Mam nadzieję, że zaprezentowane w tym artykule spojrzenie na symbole Newtona od strony wielomianów przekona Czytelników do istnienia zgrabnej teorii nimi rządzącej. Kolejną zaletą podejścia wielomianowego jest algebraiczna metoda przeprowadzanych dowodów. W porównaniu z dowodami kombinatorycznymi i indukcyjnymi jest ona często bardziej elegancka. Z drugiej strony, kombinatoryczna interpretacja tożsamości zawierających symbole Newtona czyni je jednak bardziej wymownymi i atrakcyjnymi.

Jeżeli spojrzymy na symbole Newtona jako na współczynniki występujące w rozwinięciu funkcji $f(y) = (1+y)^x$ w szereg potęgowy wokół zera, to nie ma powodu, by ograniczać się tylko do całkowitych wartości x (Czytelników, którzy nie wiedzą, co to jest wspomniane rozwinięcie, zapewniam, że mogą czytać dalej). Dopuszczenie rzeczywistych x daje współczynnik przy y^k, oznaczany przez $\binom{x}{k}$, który jako funkcja zmiennej x jest wielomianem stopnia k. Pomimo tego faktu dominacja $\binom{x}{k}$ dla $x \in \mathbb{N}$ jest tak duża, że niewiele osób zdaje sobie sprawę z tego, że wiele tożsamości dowodzonych dla liczb naturalnych jest prawdziwych dla dowolnych liczb rzeczywistych.

Tak naprawdę, wielomiany $\binom{x}{k}$ dla $k \in \mathbb{N}$ są też określone dla liczb zespolonych. Wszystkie stwierdzenia z tego artykułu dla $x \in \mathbb{R}$ pozostają prawdziwe dla x zespolonych.

Choć wspomnieliśmy już, jak symbole Newtona można zdefiniować dla dowolnego x, to w celu lepszego poznania ich własności dojdziemy do nich trochę inną drogą. *Pierwszą różnicą* funkcji $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcję $DF\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną następująco: $DF(x) = F(x+1) - F(x)$, dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Przez łatwą indukcję dostajemy:

$$F(x+n) = F(x) + \sum_{j=0}^{n-1} DF(x+j), \tag{$*$}$$

oraz

$$F(x-n) = F(x) - \sum_{j=1}^{n} DF(x-j)$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jest zatem jasne, że *jeśli funkcja DF dla liczb całkowitych przyjmuje wartości całkowite oraz $F(0)$ jest liczbą całkowitą, to funkcja F przekształca liczby całkowite w liczby całkowite.* Odnotujmy jeszcze jedną własność DF w przypadku, gdy F jest wielomianem. Jeśli stopień F jest równy k, to DF jest wielomianem stopnia $k-1$. Jeśli umówimy się, że stopień wielomianu tożsamościowo równego 0 wynosi -1, to jest to prawda także dla wielomianów stałych.

Jak wiadomo, każdy wielomian stopnia k jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje wartości dla $k+1$ argumentów. Zdefiniujmy więc wielomian $\binom{x}{k}$ jako jedyny wielomian stopnia k zmiennej x, taki że
- $\binom{x}{k} = 0$ dla $x = 0, \ldots, k-1$,
- $\binom{x}{k} = 1$ dla $x = k$.

Jeśli $F(x)$ jest równe $\binom{x}{k}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to wielomian DF dany jest wzorem:

$$DF(x) = \binom{x+1}{k} - \binom{x}{k}.$$

Zauważmy, że $DF(x) = 0$ dla $x = 0, \ldots, k-2$ oraz $DF(x) = 1$ dla $x = k-1$. Wielomiany $DF(x)$ i $\binom{x}{k-1}$ mają stopień $k-1$ i przyjmują takie same wartości w k różnych punktach. Dostajemy stąd

Twierdzenie 1. *Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$ zachodzi*
$$\binom{x+1}{k} = \binom{x}{k} + \binom{x}{k-1}.$$
Taka sama tożsamość jest podstawą konstrukcji trójkąta Pascala. Podkreślmy jednak, że x może być dowolną liczbą rzeczywistą.

Wielomian stały $\binom{x}{0} \equiv 1$ przyjmuje tylko całkowite wartości. Stosując formułę sumacyjną $(*)$, indukcyjnie możemy udowodnić

Twierdzenie 2. *Wielomiany $\binom{x}{k}$ przekształcają liczby całkowite w liczby całkowite.*

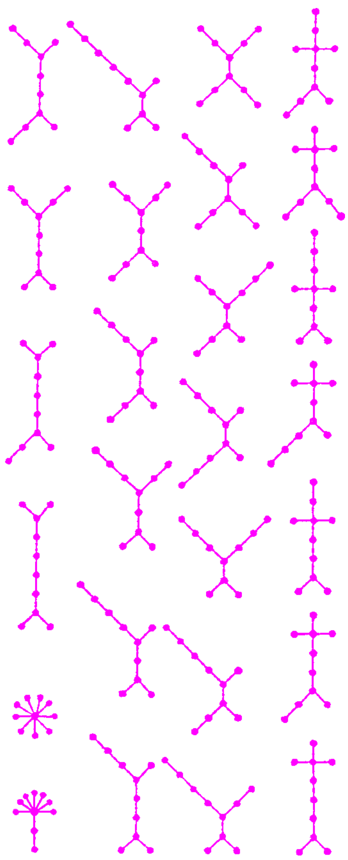
Twierdzenie to nabiera znaczenia, gdy podamy bezpośredni wzór na wielomian $\binom{x}{k}$. Pierwiastkami wielomianu k-tego stopnia $F(x) = \prod_{j=0}^{k-1}(x-j)$ są liczby $0, 1, \ldots, k-1$. Zatem $F(x)/F(k)$ przyjmuje takie same wartości jak $\binom{x}{k}$, czyli
$$\binom{x}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(x-j)$$
dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że wprowadzona przez nas definicja $\binom{x}{k}$ zgadza się z tą podaną we wstępie, oraz że wprowadzone wielomiany są rzeczywiście uogólnieniem zwykłego symbolu Newtona.

Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Przyporządkujemy jej ciąg wielomianów, które zgadzają się z f w coraz większej liczbie punktów. Mianowicie, zdefiniujmy rekurencyjnie ciąg złożony z wielomianów F_k postaci $F_k(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j \binom{x}{j}$ następująco:
- $F_{-1} \equiv 0$,
- $a_k = f(k) - F_{k-1}(k)$,
- $F_k(x) = F_{k-1}(x) + a_k\binom{x}{k}$.

Wielomian F_k stopnia k przyjmuje te same wartości co funkcja f dla $x = 0, \ldots, k$. Zauważmy, że wyrazy $a_0, \ldots, a_k$ są wyznaczone przez ten warunek jednoznacznie. Co więcej, jeśli $f(0), \ldots, f(k)$ są całkowite, to również $a_0, \ldots, a_k$ są całkowite. Co się dzieje w przypadku, gdy f jest w rzeczywistości obcięciem pewnego wielomianu G stopnia k do liczb naturalnych? Wielomian F_k też ma stopień k i zgadza się z G w $k+1$ punktach, więc te wielomiany są równe. Dostajemy kolejne

Twierdzenie 3. *Niech G będzie wielomianem stopnia $\leqslant n$. Następujące warunki są równoważne:*
i) G przekształca liczby całkowite w liczby całkowite,
ii) istnieje liczba całkowita r, takie że $G(x)$ jest całkowite dla $x = r, \ldots, r+n$,
iii) $G(x)$ jest całkowite dla $x = 0, \ldots, n$,
iv) istnieje jednoznacznie wyznaczony ciąg takich liczb całkowitych $a_0, \ldots, a_n$, że $G(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\binom{x}{j}$.

Równoważność *ii*) oraz *iii*) wynika z prostej obserwacji, że wielomiany $G(x)$ oraz $H(x) = G(x+r)$, gdzie $r \in \mathbb{Z}$, mają takie same zbiory wartości na liczbach całkowitych: $\{H(x) : x \in \mathbb{Z}\} = \{G(x) : x \in \mathbb{Z}\}$. Aby zastosować powyższą teorię, spróbujmy obliczyć sumę $PS_n^k = 0^k + 1^k + \ldots + n^k$, gdzie $k, n \in \mathbb{N}$. Spójrzmy na ten problem bardziej ogólnie. Niech f będzie wielomianem k-tego stopnia. Istnieje wtedy jednoznacznie wyznaczony wielomian F stopnia $k+1$, taki że
$$F(n) = \sum_{j=0}^{n} f(j).$$
Istotnie: zauważmy, że jeżeli taki F istnieje, to $F(0) = f(0)$ oraz dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $DF(x) = f(x+1)$, bo obie strony są wielomianami k-tego stopnia i zgadzają się na liczbach naturalnych. Widać, że taki F może być co najwyżej jeden. Ponadto wiemy już, jak znaleźć współczynniki $a_0, a_1, \ldots, a_k$, dla których
$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot \binom{x}{j}.$$



drzewka z dziesięcioma wierzchołkami – ciąg dalszy 1

Wtedy F możemy po prostu wskazać:

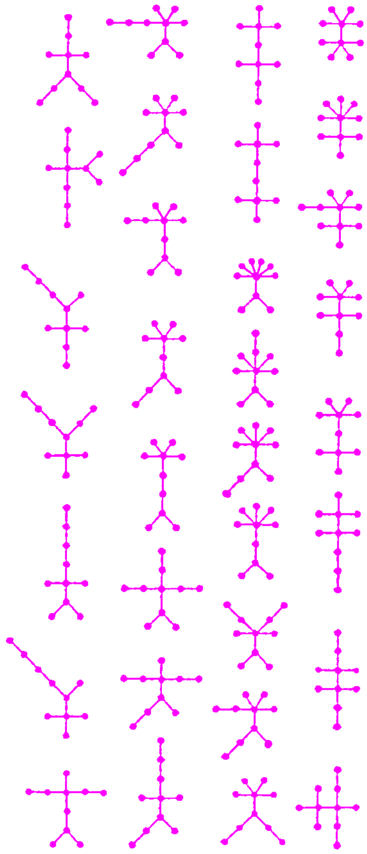
$$F(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot \binom{x+1}{j+1}.$$

Nasze zadanie sprowadza się więc do znalezienia współczynników a_j^k, takich że $x^k = \sum_{j=0}^{k} a_j^k \cdot \binom{x}{j}$. Dla $k=0$ mamy $x = \binom{x}{0}$, gdy zaś $k=1$, to $x = \binom{x}{1}$. Nasz rezultat zgadza się więc z dobrze znanym wzorem:

$$0^1 + 1^1 + \ldots + n^1 = \binom{n+1}{2}.$$

W przypadku większych k zastosowanie metody z dowodu twierdzenia 3 pozwala stwierdzić, że

- $a_j^k = 0$ dla $j > k$,
- $a_0^0 = 1$ oraz $a_0^k = 0$ dla $k > 0$.
- $a_1^k = 1$ dla $k > 1$,
- $a_2^k = 2^k - 2$ dla $k \geqslant 2$.



drzewka z dziesięcioma wierzchołkami – ciąg dalszy 2

Przez porównanie współczynników przy najwyższej potędze możemy jeszcze stwierdzić, że $a_k^k = k!$. Niestety, próby wyznaczania pozostałych współczynników prowadzą do coraz bardziej zawiłych rachunków. W tym momencie przydatna okaże się formuła

$$x \cdot \binom{x}{k} = k \cdot \binom{x}{k} + (k+1) \cdot \binom{x}{k+1},$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Dowodzimy jej standardowo – obie strony przyjmują takie same wartości dla $x = 0, 1, \ldots, k+1$, co dla wielomianów stopnia $k+1$ oznacza, że są równe. W przypadku $k = 2$ dostajemy

$$x^2 = x \cdot \binom{x}{1} = \binom{x}{1} + 2 \cdot \binom{x}{2},$$

a stąd

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \binom{n+1}{2} + 2 \cdot \binom{n+1}{3}.$$

Podobnie z równości

$$x^3 = x \cdot \left(\binom{x}{1} + 2 \cdot \binom{x}{2}\right) = \binom{x}{1} + 6 \cdot \binom{x}{2} + 6 \cdot \binom{x}{3}$$

otrzymujemy

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \binom{n+1}{2} + 6 \cdot \binom{n+1}{3} + 6 \cdot \binom{n+1}{4}.$$

1
1 2
1 6 6
1 14 36 24
1 30 150 240 120
1 62 540 1560 1800 720
1 126 1806 8400 16800 15120 5040
1 254 5796 40824 126000 191520 141120 40320

W ogólności dostajemy formułę rekurencyjną $a_j^{k+1} = j \cdot (a_{j-1}^k + a_j^k)$ dla $j \in \mathbb{N}_+$ i $k \in \mathbb{N}$. Prowadzi ona do kuzyna trójkąta Pascala, widocznego obok, w którym każdy wyraz a_j^{k+1} jest sumą wyrazów a_{j-1}^k i a_j^k stojących tuż nad nim, pomnożoną przez j.

Oznaczmy przez Sur_j^k liczbę funkcji ze zbioru k-elementowego na zbiór j-elementowy. Ponieważ $\mathrm{Sur}_0^k = a_0^k$, a ponadto Sur_j^k spełniają taką samą zależność rekurencyjną co a_j^k, więc dostajemy

Twierdzenie 4. *Dla dowolnego* $k, n \in \mathbb{N}$ *mamy*

$$x^k = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{Sur}_j^k \cdot \binom{x}{j}$$

oraz

$$0^k + 1^k + 2^k + \ldots + n^k = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{Sur}_j^k \cdot \binom{n}{j+1}.$$

Czytelnikom pozostawiamy podanie interpretacji kombinatorycznej tego twierdzenia w przypadku, gdy $x \in \mathbb{N}$.