Ogólna teoria miary i całki w skrócie

Rafał SZTENCEL

W poprzednich dwóch odcinkach pokazaliśmy, jak obliczać wartość oczekiwaną (czyli wartość średnią) zmiennej losowej X, całkując uogólnioną funkcję odwrotną do jej dystrybuanty. Funkcja ta jest lewostronnie ciągła i niemalejąca, więc do jej scałkowania wystarczy całka Riemanna. Do czego w takim razie przydaje się w rachunku prawdopodobieństwa ogólna teoria miary i całki?

Zauważmy, że korzystaliśmy poprzednio w sposób istotny z bardzo wygodnej własności wartości oczekiwanej:

$$(*) \qquad E(X+Y) = EX + EY.$$

Należałoby ją udowodnić. Można to zrobić dość łatwo dla zmiennych losowych X i Y o rozkładach dyskretnych, istnieje też nieco trudniejszy dowód dla przypadku, gdy łączny rozkład pary (X,Y) jest ciągły. Nie wyczerpuje to jednak wszystkich rozkładów. Jak widzieliśmy, bardzo łatwo otrzymać rozkład, który nie jest ani dyskretny, ani ciągły. Co wtedy?

Ogólna teoria miary i całki pozwala na sformułowanie zwięzłej definicji wartości średniej:

$$EX = \int_\Omega X\,\mathrm{d}P,$$

gdzie zmienna losowa X jest odwzorowaniem ze zbioru zdarzeń elementarnych Ω w zbiór liczb rzeczywistych. Odwzorowanie to musi być dostatecznie regularne, tak by zbiór $\{\omega\in\Omega\colon X(\omega)\leqslant a\}$ był dla każdego a zdarzeniem.

Za zwięzłość definicji płaci się trudnościami technicznymi przy rozwijaniu teorii. Dobrze jednak zdać sobie sprawę, że wartość średnia jest jakimś rodzajem całki, bo wtedy własność $(*)$ przysługuje każdej rozsądnej procedurze całkowania czy też uśredniania.

Z procedurami uśredniania zapoznajemy się dość wcześnie. Punktem wyjścia jest średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}.$$

Kolejny stopień komplikacji to średnia ważona

$$x_1p_1+\ldots+x_np_n,$$

gdzie $p_1+\ldots+p_n=1$ i wszystkie liczby p_i (zwane wagami) są nieujemne. Rozpoznajemy tu oczywiście wzór na wartość średnią zmiennej losowej X o rozkładzie dyskretnym, która przyjmuje wartości x_i na zdarzeniach A_i, takich że $P(A_i)=p_i$. Taką zmienną losową nazywamy zmienną losową *prostą*. Mamy więc

$$EX = \sum_{i=1}^n x_iP(A_i).$$

Wystarczy jeden drobny krok*, żeby otrzymać ogólną definicję wartości średniej dla dowolnej nieujemnej zmiennej losowej X:

$$EX = \sup EZ,$$

gdzie kres górny jest brany po wszystkich zmiennych losowych prostych $Z\leqslant X$. A jeśli odrzucimy założenie o nieujemności, to

$$EX = EX^+ - EX^-,$$

jeśli tylko co najmniej jeden z wyrazów po prawej stronie jest skończony. Przy takiej definicji może bowiem okazać się, że $EX=\infty$.

Zamiast EX mogliśmy wszędzie pisać $\int_\Omega X\,\mathrm{d}P$ – zdefiniowalibyśmy wtedy całkę z X względem miary probabilistycznej P.

Autor tendencyjnie pominął trudności techniczne. Należałoby, na przykład, wykazać, że dla każdej nieujemnej zmiennej losowej X istnieje ciąg zmiennych losowych prostych (Z_n), taki że $Z_n\leqslant X$, $n=1,2,\ldots$ oraz Z_n zmierza monotonicznie do X – to pozwoliłoby na udowodnienie własności $(*)$.

Nie należy też sądzić, że konstrukcja nietrywialnej miary probabilistycznej – chociażby miary Lebesgue'a – na przedziale $[0,1]$ jest banalna. Ale znów podstawowy pomysł jest bardzo prosty: chcemy skonstruować taką miarę, by uogólniała pojęcie długości odcinka. Wiemy zatem, jaką miarę powinny mieć odcinki. Teraz definiujemy dla $A\subset[0,1]$

$$\lambda^*(A) = \inf\sum_{i=1}^\infty (b_i-a_i),$$

gdzie kres dolny jest brany po wszystkich rodzinach przedziałów $[a_i,b_i]$ pokrywających zbiór A. Funkcja λ^* nie jest miarą (jest tylko tak zwaną miarą zewnętrzną). Jeśli zawęzimy ją do pewnej rodziny $\mathcal{M}$ podzbiorów odcinka $[0,1]$, otrzymamy prawdziwą przeliczalnie addytywną miarę λ, jako że dla parami rozłącznych zbiorów A_i będzie mieć miejsce równość:

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \bigcup_{i=1}^\infty \lambda(A_i);$$

dla miary zewnętrznej, jak łatwo stwierdzić, lewa strona nie przekracza prawej.

Czytelnik zechce teraz obliczyć

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

gdzie

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \text{ niewymiernych,}\\ 0 & \text{dla } x \text{ wymiernych.}\end{cases}$$

* ...człowieka, ale wielki skok ludzkości (Neil Armstrong lub Juliusz Machulski, „Seksmisja” – jak kto woli).