# O dwóch takich, co chcieli zarobić na fluktuacjach

Szanowna Redakcjo,

piszę ten list, aby ostrzec Czytelników *Delty* przed dwoma oszustami kręcącymi się po okolicy. Osoby te przedstawiają się jako Matematyk i Fizyk i proponują udział w przedsięwzięciach, które wyglądają niezwykle obiecująco. Tego pamiętnego dnia spotkałem najpierw Matematyka. Słuchaj – powiedział – rzucę monetą. Jeżeli wypadnie orzeł, to płacisz mi złotówkę, a jeżeli reszka, to ja Tobie dam złotówkę. Jest to oczywiście gra sprawiedliwa – prawdopodobieństwo wygranej dla każdego z nas wynosi 1/2. Ta gra szybko nas jednak znudziła. Ciekaw jestem, co sądzisz o mojej drugiej grze? – zapytał Matematyk. Oprócz uczciwej monety mam jeszcze dwie odpowiednio obciążone monety; prawdopodobieństwo wyrzucenia orła dla monety drugiej wynosi 3/4, a dla trzeciej 1/10. Wybór rzucanej monety zależy od wysokości mojego kapitału (może to być liczba ujemna). Jeżeli jest on podzielny przez 3, to rzucam trzecią monetą, a w przeciwnym przypadku monetą drugą. Tak jak poprzednio, orzeł oznacza złotówkę dla mnie, a reszka złotówkę dla Ciebie – zakończył Matematyk i popatrzył na mnie wyczekująco. Na pierwszy rzut oka nie wyglądało to dla mnie dobrze. Pomyślałem, że średnio raz na trzy rzuty kapitał mojego przeciwnika będzie podzielny przez 3 i będziemy rzucać korzystną dla mnie monetą trzecią, w 2/3 rzutów używana będzie moneta sprzyjająca Matematykowi. Oznacza to, że prawdopodobieństwo wygranej w jednym rzucie wynosiłoby dla mnie:

$$1/3 \times 9/10 + 2/3 \times 1/4 = 7/15,$$

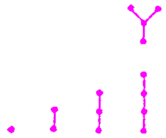
czyli mniej niż 1/2. Matematyk upierał się, że jest to gra sprawiedliwa. Przeprosiłem go na chwilę i na boku dokonałem pewnych obliczeń. Niech reszty z dzielenia kapitału Matematyka przez 3, czyli $0, 1$ lub 2, reprezentują stan naszego układu. Prawdopodobieństwo znalezienia się w danym stanie zależy tylko od stanu układu w chwili poprzedniej, a nie od całej historii naszej rozgrywki. Ewolucja naszego układu jest przykładem łańcucha Markowa. Można wykazać, że w miarę upływu czasu częstotliwości odwiedzania poszczególnych stanów układu dążą do pewnych wartości granicznych. Moje obliczenia wykazały, że graniczna częstotliwość rzucania monetą trzecią jest jednak większa od 1/3 i wynosi 5/13 (patrz kurs łańcuchów Markowa w Post Scriptum 1). Prawdopodobieństwo wygranej w jednym rzucie wynosi więc:

$$5/13 \times 9/10 + 8/13 \times 1/4 = 1/2.$$

Jak już się przekonałeś – kontynuował Matematyk – że ta druga gra też jest sprawiedliwa, to z pewnością zagrałbyś w obie gry, gdyby wszystkie trzy monety były obciążone tak, aby prawdopodobieństwa wyrzucenia orła $p_i, i = 1, 2, 3$, były mniejsze niż poprzednio, powiedzmy

$$p_1 = 1/2 - \varepsilon, \qquad p_2 = 3/4 - \varepsilon \qquad \text{i} \qquad p_3 = 1/10 - \varepsilon,$$

gdzie $\varepsilon$ jest małą ustaloną liczbą dodatnią. Wtedy przecież, jak łatwo sprawdzić (sprawdź to, proszę, Czytelniku), prawdopodobieństwa Twojej wygranej w obu grach są większe od 1/2. Powiedziałem, że, oczywiście, bardzo chętnie zagram. I wtedy padła propozycja, którą będę długo pamiętał. Matematyk zaproponował, żeby dla urozmaicenia zmieniać gry w sposób losowy. Aby nam się nie nudziło – powiedział – z prawdopodobieństwem 1/2 będziemy grać w pierwszą grę i z takim samym prawdopodobieństwem w drugą grę. Zaczęliśmy rozgrywkę. Po kilkuset grach stwierdziłem z przerażeniem, że mój kapitał jest mocno ujemny. Matematyk jakoś szybko się ze mną pożegnał, a ja zacząłem się zastanawiać, co jest (czy raczej było) grane. Druga gra (tak jak i pierwsza) jest dla mnie korzystna. Kiedy jednak kapitał Matematyka był podzielny przez 3, w mniej więcej połowie przypadków, zamiast rzucać bardzo korzystną dla mnie monetą trzecią, rzucał on monetą pierwszą i wtedy prawie z jednakowym prawdopodobieństwem mogłem stracić lub zyskać złotówkę. To mogło być źródłem mego problemu. Rzuciłem się do obliczeń. Przeanalizowałem łańcuch Markowa odpowiadający losowej kombinacji obu gier dla przypadku $\varepsilon = 0$. Stwierdziłem, że granicznymi częstotliwościami przebywania w stanach $0, 1$ i 2



drzewka mające co najwyżej 4 wierzchołki – nic ciekawego są odpowiednio $245/709, 180/709$ i $284/709$. Ostatecznie prawdopodobieństwo wygrania przeze mnie w jednym ruchu jest równe

$$\frac{245}{709}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10}\right)+\frac{180}{709}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)+\frac{284}{709}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{691}{1418},$$

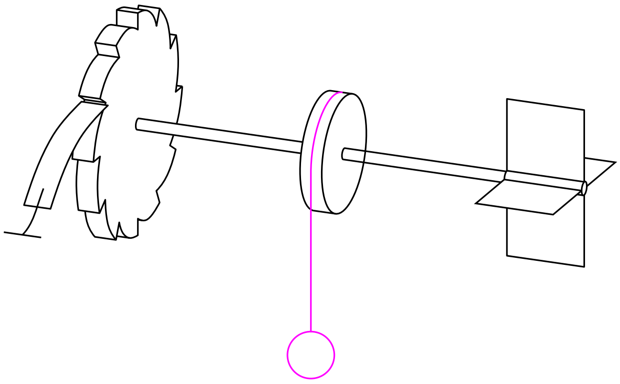
zatem jest mniejsze od $1/2$. Wartość oczekiwana mojej wygranej wynosi wtedy

$$691/1418-727/1418=-36/709.$$

Oznacza to, że jeżeli będziemy grać odpowiednio długo, to mój kapitał będzie malał proporcjonalnie do upływu czasu ze współczynnikiem proporcjonalności $-36/709$. Ponieważ częstotliwości odwiedzin stanów naszego łańcucha Markowa zależą w sposób ciągły od $\varepsilon$, to dla odpowiednio małego $\varepsilon$, kiedy obie gry stają się dla mnie korzystne, ich losowa kombinacja nadal jest dla mnie zgubna. Mamy więc tutaj do czynienia z przykładem dwóch losowych dynamik, dla których wartość oczekiwana pewnej zmiennej losowej rośnie, natomiast dla losowej kombinacji tych dynamik wartość oczekiwana tej zmiennej losowej maleje z czasem.

Zachęcam do sprawdzenia powyższych rezultatów (analitycznie na kartce papieru lub symulując rzuty monetami na komputerze). Może to uodpornić na inne sztuczki probabilistycznych oszustów.

Ledwo zdążyłem ochłonąć, kiedy do moich drzwi zapukał Fizyk. Od razu przeszedł do rzeczy i pokazał mi szkic swojego nowego urządzenia (patrz rysunek). Była to oś z wiatraczkiem po jednej stronie, zębatką i zapadką po drugiej stronie i ze szpulką z nitką pośrodku.



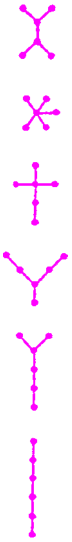
Cząsteczki powietrza uderzają bez przerwy w łopatki wiatraczka. Wiatraczek, jak i pozostała część urządzenia, ma bardzo małe rozmiary. Losowe fluktuacje powodują, że czasem więcej cząsteczek uderzy w łopatki z jednej strony niż z drugiej. Jest to sytuacja analogiczna do ruchów Browna cząsteczki zawiesiny uderzanej przypadkowo przez cząsteczki otaczającej ją cieczy. Bez zapadki, w różnych chwilach czasu wiatraczek obracałby się w różne strony. Zapadka umożliwia ruch tylko w jedną stronę. W wyniku tej asymetrii szpulka z nitką będzie w stanie podnosić mikroskopijne ciężary. Urządzenie moje – podsumował Fizyk – przekształca nieukierunkowane fluktuacje na ruch w jednym wybranym kierunku. Uzyskujemy pracę kosztem fluktuacji, mamy więc darmowe źródło energii. I to urządzenie może być Twoje, oczywiście za pewną opłatą. Tym razem byłem czujniejszy. Rozumiałem już po spotkaniu z Matematykiem, że złożenie dwóch losowych dynamik, dla których stan układu średnio się nie zmienia, może doprowadzić do ruchu w jednym kierunku. Zapadka jednak, podobnie jak wiatraczek, poddana jest takim samym uderzeniom otaczających ją cząsteczek, wykonuje analogiczne ruchy Browna i w związku z tym od czasu do czasu podnosi się przypadkowo i pozwala opaść ciężarkowi. W efekcie średnie przesunięcie ciężarka jest zerowe – sama asymetria zapadki nie wystarcza. Jeżeli natomiast temperatura powietrza wokół zapadki byłaby mniejsza od temperatury powietrza wokół wiatraczka (tak jak różne były prawdopodobieństwa wyrzucenia orła dla różnych monet), to fluktuacje zapadki byłyby mniejsze od fluktuacji wiatraczka i urządzenie Fizyka wykonywałoby rzeczywiście pracę kosztem energii pobranej z otoczenia cieplejszego, oddając

pięć wierzchołków – też brak rewelacji

jej część do otoczenia zimniejszego. Jest to przykład silnika Browna. Niestety, musielibyśmy jeszcze utrzymywać powietrze wokół wiatraczka i zapadki w stałych temperaturach, a to, oczywiście, dodatkowo kosztuje. Jeszcze jedna próba zbudowania *perpetuum mobile* (II rodzaju) okazała się bezowocna. Wizja szybkiego wzbogacenia znacznie się oddaliła.

Wieczorem rozmawiałem ze znajomym Biologiem. Opowiedziałem mu o swoich porannych matematyczno-fizycznych doświadczeniach. Biolog zasugerował, że być może Natura znalazła sposób, aby wykorzystać mikroskopowe fluktuacje ruchów cząsteczek w komórkach i zamienić energię wyzwalaną w reakcjach biochemicznych na transport użytecznych składników komórkowych. Być może molekularne motory komórkowe działają podobnie do silników Browna. Na szczęście Biolog nie chciał mi ich sprzedawać. Zajęliśmy się spożywaniem różnych smakowitości, czyli przetwarzaniem dań szefa kuchni na proste związki organiczne, czego i Wam wszystkim życzę.

Z pozdrowieniami, *Jacek MIĘKISZ*, matematyk fizyczno-biologiczny,
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki UW



drzewek z sześcioma wierzchołkami jest 6

## Post Scriptum 1

**Krótki kurs łańcuchów Markowa**

W naszej grze mamy do czynienia z układem, który może znajdować się w trzech stanach: $0, 1$ lub $2$, odpowiadających reszcie przy dzieleniu kapitału Matematyka przez 3. Prawdopodobieństwa przejść pomiędzy tymi stanami, $p_{ij}; i, j = 0, 1, 2$, dla drugiej gry wynoszą odpowiednio: $p_{00} = p_{11} = p_{22} = 0$, $p_{01} = 0{,}1$, $p_{02} = 0{,}9$, $p_{12} = 0{,}75$, $p_{10} = 0{,}25$, $p_{20} = 0{,}75$, $p_{21} = 0{,}25$.

Prawdopodobieństwo tego, że w chwili $t + 1$ będziemy w stanie $i$, zależy tylko od tego, w jakim stanie byliśmy w chwili $t$. Jest to tak zwana własność Markowa braku pamięci, którą krótko można scharakteryzować tak: przyszłość nie zależy od przeszłości, pod warunkiem że znana jest teraźniejszość. Niech $\pi_i^t$ będzie prawdopodobieństwem znalezienia się układu w stanie $i$ w chwili $t$. Wtedy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite uzyskujemy

$$\pi_i^{t+1} = p_{0i}\pi_0^t + p_{1i}\pi_1^t + p_{2i}\pi_2^t; \qquad i = 0, 1, 2.$$

Powyższa ewolucja naszego układu jest przykładem łańcucha Markowa. Zauważmy, że z każdego stanu możemy przejść, w skończonej liczbie kroków, do każdego innego stanu. Dla takich łańcuchów, w miarę upływu czasu, częstotliwości odwiedzania poszczególnych stanów układu dążą do pewnych wartości niezależnych od stanu początkowego. W naszym przypadku te graniczne częstotliwości spełniają następujący układ równań liniowych:

$$\pi_0 = 0{,}25\pi_1 + 0{,}75\pi_2$$
$$\pi_1 = 0{,}1\pi_0 + 0{,}25\pi_2$$
$$\pi_2 = 0{,}9\pi_0 + 0{,}75\pi_1$$

Układ ten ma, oczywiście, nieskończenie wiele rozwiązań, ale tylko jedno rozwiązanie,

$$\pi_0 = 5/13, \qquad \pi_1 = 2/13, \qquad \pi_2 = 6/13,$$

spełnia warunek

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

i daje nam częstotliwości odwiedzania stanów naszego układu. W szczególności, kapitał Matematyka jest podzielny przez 3 średnio w $5/13$ wszystkich rzutów.

**Rozwiązanie zadania M 1152.**
Podnosimy stronami do kwadratu dane nierówności, po czym dodajemy je stronami. W efekcie uzyskujemy

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \leqslant 0,$$

skąd

$$(a + b + c)^2 \leqslant 0.$$

A zatem

$$a + b + c = 0.$$

## Post Scriptum 2

Idea urządzenia wykorzystującego ruchy Browna do wykonania użytecznej pracy została po raz pierwszy przedyskutowana w 1912 roku przez Mariana Smoluchowskiego, a potem rozwinięta przez Richarda Feynmana (Feynmana *Wykłady z Fizyki*, Tom I, Część 2, Rozdział 46).

Paradoksalne gry hazardowe zostały zaproponowane w 1996 roku przez Juana Parrondo w nieopublikowanym artykule „How to cheat a bad mathematician".