Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2006

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
414 ($WT = 1{,}99$) i **415** ($WT = 2{,}93$)
z numeru 3/2006

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	41,12
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	31,21
Konrad Kapcia	– Częstochowa	30,66
Tomasz Tkocz	– Rybnik	27,85
Jerzy Witkowski	– Radlin	18,79
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	12,40

Zadania z fizyki nr 424, 425

Redaguje Jerzy B. BROJAN

424. Dwa jednakowe tramwaje z tą samą liczbą pasażerów przejechały z tą samą prędkością tę samą trasę, z wieloma przystankami. Czy zachowanie się pasażerów może być przyczyną tego, że jeden tramwaj zużył więcej energii elektrycznej niż drugi?

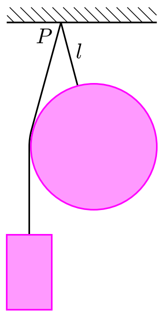
425. Wewnątrz szklanej kuli, w punkcie P odległym od środka kuli o r znajduje się izotropowe źródło światła. Jaka część wysyłanego światła wydostaje się z kuli? Dane są: współczynnik załamania szkła $n = 1{,}5$ oraz stosunek $k = r/R = 0{,}75$, gdzie R – promień kuli. Szkło jest doskonale przezroczyste.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/2006

Przypominamy treść zadań:

420. W tym samym punkcie P zawieszono na nici o długości $l = 3$ cm kulę o promieniu $r = 5$ cm i masie $m_1 = 300$ g oraz na odpowiednio długiej nici (zob. rys. 1) ciężarek o masie $m_2 = 200$ g. Tarcie między kulą a tą nicią nie występuje. Obliczyć siłę napinającą nić, na której wisi kula.

421. Ekran jest równomiernie oświetlony światłem padającym na niego prostopadle. Jak zmieni się natężenie jego oświetlenia, jeśli na drodze promieni ustawimy pryzmat o kącie łamiącym α ze szkła o współczynniku załamania n? Ściana, na którą pada światło, jest równoległa do ekranu. Pominąć odbicie światła od ścian pryzmatu.



Rys. 1

420. Oznaczmy przesunięcie poziome środka kuli względem punktu P przez x. Z równowagi momentów sił względem P wynika równanie

$$m_2(r - x) = m_1 x.$$

Stąd

$$x = r\frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Wprowadźmy teraz kąty odchylenia nici od pionu – dla górnej części lewej nici α, a dla prawej nici β. Ponieważ nie ma tarcia między kulą a lewą nicią, więc z warunku równowagi kuli wynika, że jej środek musi leżeć na przedłużeniu prawej nici, a zatem

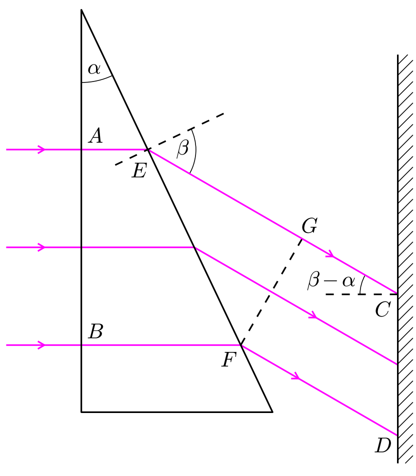
$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{r}{r + l}, \qquad \sin\beta = \frac{x}{r + l} = \frac{r}{r + l}\frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Wartości kątów wynoszą $\alpha = 24{,}2^\circ$, $\beta = 14{,}5^\circ$. Siła napięcia lewej nici jest równa $m_2 g$, a szukaną siłę napięcia prawej nici oznaczmy przez F. Suma pionowych składowych obu tych sił musi być równa łącznemu ciężarowi zawieszonych ciał, tzn.

$$m_2 g\cos\alpha + F\cos\beta = (m_1 + m_2)g.$$

Stąd znajdujemy $F = 3{,}22\,\mathrm{N}$.

421. Szukany stosunek natężeń oświetlenia jest równy stosunkowi powierzchni przekroju wiązki padającej na pryzmat do powierzchni oświetlonej tą wiązką na ekranie, tzn. $E_2/E_1 = AB/CD$ (zob. rys. 2).



Rys. 2

Podstawiamy

$$AB = EF\cos\alpha, \quad CD = GF/\cos(\beta - \alpha), \quad GF = EF\cos\beta,$$

zatem

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\cos\alpha\cos(\beta - \alpha)}{\cos\beta}.$$

Po skorzystaniu z prawa załamania ($\sin\beta = n\sin\alpha$) wyrażenie to przyjmuje postać

$$\frac{E_2}{E_1} = \cos\alpha\left(\cos\alpha + \frac{n\sin^2\alpha}{\sqrt{1 - n^2\sin^2\alpha}}\right).$$

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2006

Zadania z matematyki nr 527, 528

Redaguje Marcin E. KUCZMA

527. Funkcja f, określona na zbiorze wszystkich liczb nieujemnych, o wartościach rzeczywistych, jest różniczkowalna w przedziale $(0;\infty)$, ciągła prawostronnie w punkcie 0 oraz spełnia warunki

$$f(0)=0, \qquad |f'(x)| \leqslant \pi \cdot |f(x)| \quad \text{dla} \ \ x>0.$$

Czy z tych założeń wynika, że f jest funkcją równą tożsamościowo zeru?

528. Wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej a oraz każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{a+k}{n} \right\rfloor = \lfloor a \rfloor.$$

Zadanie 528 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2006

Przypominamy treść zadań:

523. Wewnątrz sześciokąta wypukłego $ABCDEF$ znajduje się punkt O, z którego każdy bok sześciokąta jest widoczny pod kątem 60°, a ponadto

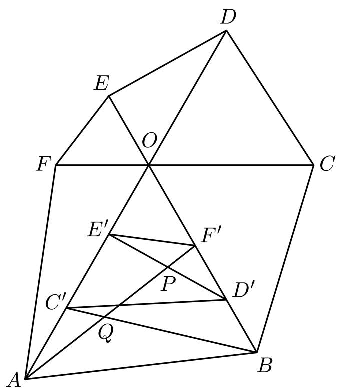
$$|OA|>|OC|>|OE| \quad \text{oraz} \quad |OB|>|OD|>|OF|.$$

Udowodnić, że $|AB|+|CD|+|EF|<|BC|+|DE|+|FA|$.

524. Ciąg liczb dodatnich (x_n) spełnia zależność rekurencyjną

$$27(1-2x_n)x_{n-1}x_{n+1} \geqslant 1 \quad \text{dla} \quad n=1,2,3,\ldots .$$

Wykazać jego zbieżność i obliczyć granicę.



523. Na odcinku OA odkładamy odcinki OC' i OE' o długościach $|OC|$ i $|OE|$. Na odcinku OB odkładamy odcinki OD' i OF' o długościach $|OD|$ i $|OF|$. Z założeń wynika, że punkty A, C', E', O oraz B, D', F', O leżą na odpowiednich prostych w takich właśnie porządkach. Sześć półprostych wychodzących z punktu O tworzy kąty o jednakowej rozwartości 60°; powstają liczne pary trójkątów przystających (jak np. OCD i $OC'D'$) i mamy równości $|BC'|=|BC|$, $|C'D'|=|CD|$, itd.

Odcinek $F'A$ przecina odcinki $D'E'$ i BC' w punktach, które oznaczymy odpowiednio P i Q. Zachodzą nierówności

$$|AB|<|AQ|+|QB|,$$
$$|CD|=|C'D'|<|C'Q|+|QP|+|PD'|,$$
$$|EF|=|E'F'|<|E'P|+|PF'|.$$

Ponieważ

$$|QB|+|C'Q|=|BC'|=|BC|, \qquad |PD'|+|E'P|=|D'E'|=|DE|$$

oraz

$$|AQ|+|QP|+|PF'|=|AF'|=|AF|,$$

uzyskane nierówności po dodaniu stronami dają dokładnie nierówność z tezy zadania.

524. Liczby x_{n-1} i x_{n+1} są dodatnie, więc także czynnik $1-2x_n$ jest liczbą dodatnią i możemy zastosować nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$x_{n-1}+(1-2x_n)+x_{n+1} \geqslant 3\cdot\sqrt[3]{x_{n-1}(1-2x_n)x_{n+1}} \geqslant 1.$$

Przyjmując oznaczenie $x_n-x_{n-1}=r_n$, przepisujemy otrzymaną nierówność jako

$$1+r_{n+1}-r_n \geqslant 1.$$

To pokazuje, że ciąg (r_n) jest niemalejący. Zatem jego wyrazy mają od pewnego miejsca stały znak; a to z kolei znaczy, że ciąg (x_n) jest od pewnego miejsca monotoniczny.

Jest też ograniczony ($x_n>0$ oraz $1-2x_n>0$), i w konsekwencji zbieżny. Jego granica $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ jest liczbą nieujemną. Przechodząc do granicy w zależności rekurencyjnej podanej w zadaniu, dostajemy nierówność

$$27(1-2\lambda)\lambda^2 \geqslant 1;$$

a po przekształceniu –

$$(3\lambda-1)^2(1+6\lambda) \leqslant 0.$$

Stąd wynik: $\lambda=1/3$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **515** ($WT=3{,}10$) i **516** ($WT=2{,}01$) z numeru 2/2006

Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	42,55
Michał Kieza	– Warszawa	38,90
Jerzy Cisło	– Wrocław	33,63
Michał Jastrzębski	– Warszawa	32,79
Łukasz Garncarek	– Opole	31,10