mniejszej od, powiedzmy, 0,01. Jeżeli współczynników o wartościach powyżej 0,01 jest stosunkowo niewiele, uzyskaliśmy efekt bardzo istotny dla efektywnej kompresji sygnału lub obrazu: przedstawienie funkcji przez wiele współczynników zastąpiliśmy przedstawieniem funkcji o stosunkowo niewielkiej liczbie współczynników, jedynie nieznacznie zmieniając sygnał początkowy (funkcję).

W 1984 Jean Morlet, geofizyk francuski i autor prototypu współczesnych falek, używał układów powstających przez rozciągnięcia i przesunięcia pewnej funkcji, gęściejszych niż we współczesnych falkach. Dzięki temu, choć funkcja startowa nie była falką, rozwinięcie sygnału w związanym z nią układzie rozciągnięć i przesunięć wciąż dobrze aproksymowało sygnał wyjściowy. Jego metoda wykrywania warstw tektonicznych przez przetwarzanie sygnału sejsmicznego polegała na przyporządkowaniu w konkretny sposób ciągłej funkcji interpolującej ten sygnał, a następnie detekcji nieciągłości jej pochodnych. W miejscach nieciągłości pochodnych niektóre współczynniki rozwinięcia, szczególnie dla wysokich „ściągnięć”, były spore. Odpowiadające im punkty stanowiły lokalizatory przejścia z warstwy do warstwy. Pomimo, że taka metoda detekcji jest odporna na zakłócenia, Morlet nie potrafił przekonać swoich kolegów, że może ona mieć szerokie zastosowania. Na szczęście, jego współpraca z A. Grossmannem, I. Daubechies i Y. Meyerem nadała tej historii inny bieg. Y. Meyer skonstruował pierwszą falkę, która jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna, choć początkowo sądzono, że jest to niemożliwe. Następnie I. Daubechies skonstruowała klasę przykładów falek o dowolnie wielu pochodnych ciągłych, ale różnych od zera jedynie na pewnym skończonym odcinku.

Wspomniane zastosowania legły u podstaw zainteresowania falkami. W 1992 algorytm oparty na falkach został wybrany i wdrożony przez FBI do efektywnej i zachowującej istotne szczegóły kompresji bazy danych z odciskami palców (2000 terabajtów danych). Metody oparte na falkach znalazły się również jako jeden z wariantów kodowania w standardzie transmisji sygnału audiowizualnego o wysokim stopniu kompresji MPEG–4 i stały się podstawą kompresji zdjęć w formacie JPEG2000. Współcześnie wykorzystuje się falki w analizie szeregów czasowych, iteracyjnym rozwiązywaniu równań różniczkowych cząstkowych opisujących np. rozchodzenie się ciepła lub naprężeń czy badaniu fal mózgowych. W MATLABie funkcja `dwt` oferuje obliczenie współczynników sygnału w układzie falkowym, a wiele ze współczesnych procesorów do przetwarzania dźwięku (DSP) zawiera transformatę falkową jako niemal standardową komendę.

Wiedzieć, nie znając

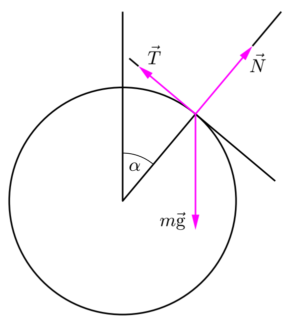
Wiktor BARTOL *

Zbiór liczb rzeczywistych jest na tyle bogaty i różnorodny, że można go rozkładać na różne sposoby wedle gustu. W szczególności można liczby rzeczywiste dzielić na algebraiczne i przestępne. Liczba algebraiczna to taka, która jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu o współczynnikach wymiernych (lub, równoważnie, całkowitych), przestępna to taka, która nie jest. Łatwo zauważyć, że liczba algebraiczna może być niewymierna, jak np. $\sqrt{2}$, spełniająca równanie $x^2 - 2 = 0$, natomiast liczba przestępna nie może nie być niewymierna, ponieważ każda liczba wymierna a spełnia równanie $x - a = 0$. Tak więc zbiór liczb algebraicznych zawiera zbiór wszystkich liczb wymiernych i jeszcze coś więcej. Jak bardzo więcej?

Znalezienie liczby przestępnej okazało się zadaniem wcale niełatwym. W 1844 roku Joseph Liouville podał pierwsze przykłady, a nawet nieskończenie wiele, korzystając przy tym z ułamków łańcuchowych. Nieco później wskazał pierwszą liczbę przestępną o znanym rozwinięciu dziesiętnym: to liczba $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0{,}11000100000000000000000100\ldots$, która ma 1 na miejscu o numerze postaci $n!$ i 0 na pozostałych. W 1873 r. Charles Hermite udowodnił przestępność podstawy logarytmu naturalnego, czyli liczby e. Korzystając z tego wyniku, Carl L. F. von Lindemann wykazał w 1882 roku, że przestępna jest także liczba π. Wynik sam w sobie ciekawy i pożyteczny, bo wynika z niego nierozwiązalność problemu kwadratury koła – lecz już nieistotny z punktu widzenia pytania o wielkość zbioru liczb algebraicznych czy zbioru liczb przestępnych. Powodem było jedno z piękniejszych twierdzeń współczesnej matematyki, opublikowane w 1874 roku przez Georga Cantora.

Cantor wprowadził do matematyki aparaturę, która pozwala mierzyć i porównywać wielkości zbiorów nieskończonych. Zbiór jest przeliczalny, jeśli

Rozwiązanie zadania F 675.
Siły działające na akrobatę: ciężkości $m\vec{g}$, tarcia $\vec{T}$ oraz reakcji podłoża $\vec{N}$, przedstawione są na rysunku:



Zgodnie z warunkiem zadania akrobata porusza się ze stałą prędkością, zatem suma sił na niego działających jest równa zeru, co rozpisane na kierunki: styczny do powierzchni oraz prostopadły daje:

$$mg\sin\alpha - T = 0,$$

$$N - mg\cos\alpha = 0.$$

Ponieważ siła tarcia T nie przekracza μN, więc równania te dają

$$\alpha_0 = \operatorname{arc\,tg}\mu.$$

*Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego

jest skończony lub jego elementy można postawić we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z elementami zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Jeśli tak nie jest, zbiór nazywamy nieprzeliczalnym. Te ostatnie zbiory można dalej różnicować pod względem wielkości (albo mocy, jak mówią matematycy), lecz tutaj nie będzie to potrzebne.

Otóż Cantor wykazał, że zbiorami przeliczalnymi są, oprócz samego zbioru $\mathbb{N}$, m.in. zbiór wszystkich liczb całkowitych, zbiór wszystkich liczb wymiernych, a także zbiór wszystkich liczb algebraicznych. Pierwszym krokiem w dowodzie tego ostatniego twierdzenia jest zauważenie, że zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach wymiernych jest przeliczalny. Wielomian możemy utożsamić ze skończonym ciągiem jego współczynników, a zbiór wszystkich skończonych ciągów o wyrazach ze zbioru przeliczalnego jest przeliczalny. Dalej, każdy wielomian (więc także o współczynnikach wymiernych) ma skończenie wiele pierwiastków, zatem wszystkich liczb algebraicznych jest przeliczalnie wiele, ponieważ suma przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

Jak jest ze zbiorem liczb przestępnych? Zacznijmy od stwierdzenia, że zbiór $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych przeliczalny nie jest. Już w przedziale $(0, 1)$ liczb rzeczywistych jest za dużo, by można było je ustawić w odpowiedniości z liczbami naturalnymi: dla każdego ciągu takich liczb znajdzie się liczba rzeczywista w $(0, 1)$, która do danego ciągu nie należy. Istotnie, niech $(a_1, a_2, \ldots)$ będzie takim ciągiem liczb zapisanych w postaci rozwinięcia dziesiętnego:

$$a_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$$

$$a_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$$

$$a_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}\ldots$$

$$\vdots$$

Przyjmijmy przy tym, że każdą liczbę zapisaliśmy tak, że w jej rozwinięciu jest nieskończenie wiele cyfr niezerowych. Na przykład, zamiast 0,1000… piszemy 0,0(9), bo to przecież to samo. To zapewni jednoznaczność zapisu liczb: liczby różniące się choćby na jednym miejscu po przecinku są różne.

Utwórzmy teraz liczbę $b = 0, b_1b_2b_3\ldots$, określając jej rozwinięcie dziesiętne w sposób następujący:

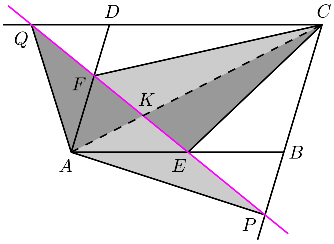
$$b_n = \begin{cases} 2 & \text{gdy } a_{nn} = 3 \\ 3 & \text{gdy } a_{nn} \neq 3 \end{cases}.$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba b różni się od liczby a_n na n-tym miejscu po przecinku, zatem jest różna od każdej liczby w ciągu.

Jeśli ze zbioru nieprzeliczalnego A wyjmiemy jego przeliczalny podzbiór B, to pozostały zbiór $A \setminus B$ będzie wciąż nieprzeliczalny. Gdyby miało być inaczej, to zbiór A, jako suma dwóch zbiorów przeliczalnych B i $A \setminus B$, też byłby przeliczalny wbrew założeniu. W szczególności, jeśli ze zbioru $\mathbb{R}$ wyjmiemy zbiór wszystkich liczb algebraicznych (przeliczalny), zostaniemy ze zbiorem wszystkich liczb przestępnych, który w ten sposób okazuje się być zbiorem nieprzeliczalnym! Inaczej mówiąc, zbiór liczb przestępnych jest na tyle większy od zbioru liczb algebraicznych, że nie da się nawet tymi ostatnimi ponumerować (bo wtedy dałby się ponumerować również liczbami naturalnymi).

W ten błyskotliwy sposób została rozstrzygnięta kwestia występowania liczb przestępnych wśród liczb rzeczywistych. Co, rzecz jasna, nie odbiera uroku dalszym poszukiwaniom interesujących przykładów takich liczb. Wiadomo, na przykład, że jeśli a jest liczbą algebraiczną i $0 \neq a \neq 1$ oraz b jest liczbą algebraiczną niewymierną, to a^b jest liczbą przestępną (a więc np. $2^{\sqrt{2}}$). Wiadomo, że liczbą przestępną jest e^{π}, ale nie wiadomo, która z liczb e^{e} i π^{π} jest przestępna, choć co najmniej jedna z nich jest. Wiele jeszcze pozostało do zrobienia…

Rozwiązanie zadania M 1144.
Niech K będzie punktem przecięcia prostych AC i EF.



Trójkąty AEC i AEQ mają równe pola, gdyż mają wspólną podstawę AE, a wysokości opuszczone na tę podstawę są równe. Stąd otrzymujemy $[ECK] = [AKQ]$, gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

Analogicznie dowodzimy, że $[FKC] = [AKP]$. Dodając stronami uzyskane równości otrzymujemy tezę.

Rozwiązanie zadania M 1145.
Wybierzmy dowolny punkt A spośród danych punktów oraz oznaczmy przez $\mathcal{C}$ zbiór tych punktów, do których można dotrzeć z punktu A poruszając się po odcinkach koloru czerwonego. (W szczególności przyjmujemy, że $A \in \mathcal{C}$.) Jeśli w zbiorze $\mathcal{C}$ znajdują się wszystkie dane punkty, to z każdego danego punktu można dotrzeć do każdego innego punktu poruszając się po odcinkach czerwonych.

Przyjmijmy więc, że istnieje niepusty zbiór $\mathcal{D}$ takich punktów, do których nie można dotrzeć z punktu A poruszając się po odcinkach czerwonych. Wtedy każdy punkt zbioru $\mathcal{D}$ jest połączony z każdym punktem zbioru $\mathcal{C}$ odcinkiem niebieskim. Zatem każde dwa punkty są połączone odcinkiem niebieskim lub łamaną złożoną z dokładnie dwóch odcinków niebieskich.