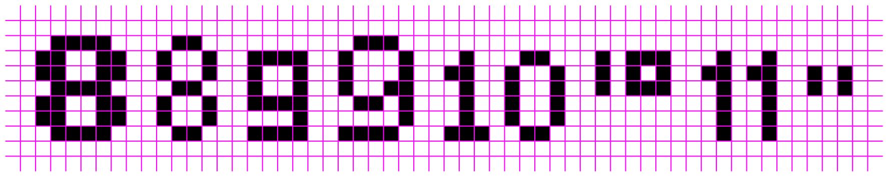
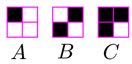
Policz i oblicz

Weź kartkę w kratkę i zamaluj kilka pól na czarno w ten sposób, by powstała liczba od 8 do 11, na przykład:



Policz, ile razy w Twoim rysunku występuje każdy z następujących układów zamalowanych pól:

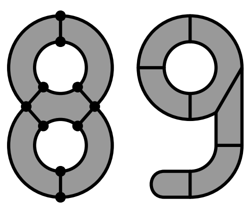


A teraz oblicz wartość $9 + A - B - C$.

Na przykład, dla kolejnych liczb z rysunku przykładowego wychodzi:

pierwsza ósemka:	$9+3-0-4=8$
druga ósemka:	$9+3-4-0=8$
pierwsza dziewiątka:	$9+1-0-1=9$
druga dziewiątka:	$9+3-3-0=9$
pierwsza dziesiątka:	$9+3-2-0=10$
druga dziesiątka:	$9+2-0-1=10$
pierwsza jedenastka:	$9+2-0-0=11$
druga jedenastka:	$9+2-0-0=11$

Jeśli sam napiszesz liczbę (od 8 do 11) trochę inaczej niż na przykładowych obrazkach, to również wynikiem powinna być napisana przez Ciebie liczba. Dlaczego?



Podobną sztuczkę można również wykonać, nie używając kartki w kratkę. Na rysunku powyżej widzimy ósemkę. Jest tam $n = 10$ punktów (wierzchołków) połączonych $m = 16$ liniami (krawędziami). Spośród powstałych obszarów (ścian) $f = 5$ jest wypełnionych. Po dodaniu $9 + n + f - m$ otrzymujemy 8. Analogicznie, dla dziewiątki mamy

$$9 + n + f - m = 9 + 12 + 6 - 18 = 9.$$

Dla jedenastki zrobionej z dwóch patyczków (bez żadnych wypełnionych obszarów) mamy $9+4+0-2=11$. Po wykonaniu tego obliczenia dla jednej z naszych liczb (od 8 do 11) podzielonej na obszary w inny sposób również w wyniku otrzymamy nią samą. (Jedna uwaga: zaznaczane obszary muszą być takie, że nie można poprowadzić przez nie krawędzi w ten sposób, by obszar nie rozpadł się na dwa mniejsze. Inaczej mówiąc, nie mogą mieć dziur w środku.)

⋆ ⋆ ⋆

Napisz liczbę od 8 do 11. Oznacz przez X liczbę cyfr, a przez Y liczbę dziur w cyfrach. Oblicz $9+X-Y$. Co wychodzi?

Obie powyższe sztuczki polegają właśnie na obliczaniu $9+X-Y$. W przypadku tej drugiej dość łatwo to udowodnić. Najprostszym możliwym rysunkiem jest rysunek pusty, dla którego

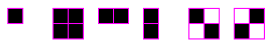
$$n=m=f=X=Y=0, \quad \text{czyli} \quad X-Y=n+f-m.$$

Bardziej skomplikowane rysunki otrzymujemy przez dodanie nowego wierzchołka (n i X zwiększają się o 1), albo dodanie nowej krawędzi (m zwiększa się o 1; jeśli dwa połączone wierzchołki były już połączone w inny sposób, to tworzy się nowa dziura, w przeciwnym przypadku X zmniejsza się o 1), albo dodanie nowej ściany (f się zwiększa, a Y się zmniejsza o 1). Każda z tych operacji zachowuje równość $X-Y=n+f-m$, więc skoro zachodziła ona na początku, to będzie również zachodziła na końcu.

Pierwsza sztuczka opiera się na tym samym. Zamiast obliczać układy A, B, C pokazane wyżej, można też obliczać

$$9+N+F-M_1-M_2-M_3-M_4,$$

gdzie N, F, M_i oznaczają, ile razy na naszym rysunku występują następujące układy:



N F M_1 M_2 M_3 M_4

Po zastanowieniu można zauważyć, że N to w zasadzie liczba wierzchołków, F — liczba ścian, a M_i to liczba krawędzi idących w jednym z kierunków. Pokazanie, że oba wzory liczą w zasadzie to samo, zostawiamy Czytelnikowi.

⋆ ⋆ ⋆

Wartość

$$X-Y=n+f-m$$

dla danego rysunku nazywamy jego *charakterystyką Eulera*; jest ona ważnym *niezmiennikiem topologicznym*, czyli wielkością niezmieniającą się przy tzw. homeomorfizmach (intuicyjnie mówiąc – przekształceniach, które mogą zmieniać kształt i wielkość, ale nic nie rozrywają ani nie sklejają). Można ją policzyć nie tylko dla obszarów na płaszczyźnie – na przykład, dla dowolnego wielościanu wypukłego jeśli n jest liczbą wierzchołków, m – liczbą krawędzi, f – liczbą ścian, to zachodzi ładny wzór

$$n+f=2+m.$$

Dzieje się tak dlatego, że charakterystyką Eulera sfery (topologicznie równoważnej z powierzchnią wielościanu) jest 2. Charakterystyka Eulera jest określona również w podobny sposób dla obiektów mających więcej wymiarów niż 2.

Małą Deltę przygotował Eryk KOPCZYŃSKI