Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

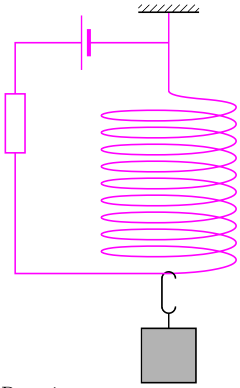
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2006

Zadania z fizyki nr 422, 423

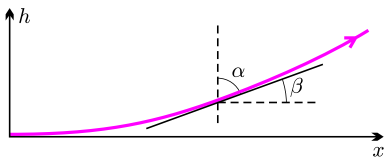
Redaguje Jerzy B. BROJAN

422. Na nieważkim sznurku o długości $l = 1\,\mathrm{m}$ wisi ciężarek o masie $m = 100\,\mathrm{g}$. Wieje wiatr, który na każdy odcinek sznurka o długości $\mathrm{d}s$ działa poziomo skierowaną siłą o wartości $\mathrm{d}F = f\ \mathrm{d}s$, gdzie $f = 0{,}8\,\mathrm{N/m}$. O ile odchyla się ciężarek pod wpływem wiatru? Pytanie dotyczy poziomej składowej przesunięcia w stanie równowagi.



Rys. 1

423. Ciężarek zawieszono na sprężynie z drutu metalowego, która jest częścią obwodu elektrycznego prądu stałego (rys. 1). Czy natężenie prądu w obwodzie pozostanie stałe, gdy wprawimy ciężarek w drgania pionowe? Jeśli nie, to w których momentach będzie ono największe, a w których najmniejsze? Wystarczy odpowiedź jakościowa, dla niewielkiej amplitudy drgań.



Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2006

Przypominamy treść zadań:

418. Przez miedziany przewód o promieniu przekroju r płynie prąd elektryczny, powodując jego nagrzewanie się. Pewien odcinek tego przewodu jest otoczony cienką warstwą izolacji o współczynniku przewodnictwa cieplnego λ. Dany jest też współczynnik przenoszenia ciepła z powierzchni do otaczającego powietrza, równy κ. Jaki warunek muszą spełniać te parametry, aby temperatura drutu w przewodzie izolowanym była niższa, niż w nieizolowanym?

Definicje współczynników λ i κ – patrz *Delta* 5/2006.

419. Oczy człowieka są na wysokości 1,7 m nad płaską, poziomą powierzchnią ziemi (np. pasem startowym na lotnisku), a temperatura na wysokości oczu jest o 3° C niższa, niż przy ziemi. W jakim zakresie odległości człowiek może widzieć powierzchnię ziemi? Wystarczy ocena przybliżona.

Dany jest bezwzględny współczynnik załamania powietrza w normalnych warunkach, równy 1,00029. Należy przyjąć, że różnica między tym współczynnikiem a jednością jest proporcjonalna do gęstości powietrza, a zależność temperatury od wysokości jest liniowa.

418. Rozważmy odcinek przewodu o długości l, pokryty izolacją o grubości $\mathrm{d}r$. W stanie stacjonarnym obowiązują równania

$$\frac{Q}{2\pi r l \mathrm{d}t} = \lambda\frac{T_1 - T_2}{\mathrm{d}r}, \qquad \frac{Q}{2\pi(r+\mathrm{d}r)l\mathrm{d}t} = \kappa(T_2 - T_3)$$

gdzie T_2 jest temperaturą zewnętrznej powierzchni izolacji. Po wyeliminowaniu T_2 znajdujemy temperaturę drutu

$$T_1 = T_3 + \frac{Q}{2\pi l \mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\lambda r} + \frac{1}{\kappa(r+\mathrm{d}r)}\right).$$

Dla małych $\mathrm{d}r$ wzór ten przyjmuje postać

$$T_1 = T_3 + \frac{Q}{2\pi l \mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\kappa} + \mathrm{d}r\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\kappa r}\right)\right).$$

Warunkiem obniżenia temperatury drutu jest $\lambda > \kappa r$.

419. Zmiana ciśnienia atmosferycznego na wysokości 1,7 m jest bardzo mała, a przy ustalonym ciśnieniu gęstość powietrza jest odwrotnie proporcjonalna do temperatury. Stąd (pomijając znaki przyrostów) $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta T}{T}$. Zgodnie z podaną wskazówką współczynnik załamania powietrza n zależy od gęstości wg wzoru $n = 1 + k\rho$, czyli

$$\Delta n = \frac{\Delta\rho}{\rho}(n-1) = \frac{\Delta T}{T}(n-1).$$

Po podstawieniu $\Delta T = 3\,\mathrm{K}$, $T = 273\,\mathrm{K}$ (dokładna wartość T nie jest bardzo istotna) i $n = 1{,}00029$ daje to $\Delta n = 3{,}2\cdot 10^{-6}$. W przybliżeniu liniowym możemy teraz podać zależność n od wysokości h nad ziemią: jest ona opisana wzorem $n = n_0 + \kappa h$, gdzie n_0 jest współczynnikiem załamania przy powierzchni ziemi, a współczynnik κ wynosi

$$3{,}2\cdot 10^{-6}/(1{,}7\,\mathrm{m}) = 1{,}9\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^{-1}.$$

Ograniczenie zasięgu widzenia pochodzi od całkowitego wewnętrznego odbicia od cieplejszych warstw powietrza. Według prawa załamania iloczyn współczynnika załamania i sinusa kąta odchylenia promienia od pionu pozostaje stały, a ponieważ promień o maksymalnym zasięgu wybiega z powierzchni ziemi stycznie (rys. 2), więc dla niego $\sin\alpha = n_0/n$. Podstawiając wyżej podany wzór $n = n_0 + \kappa h$ otrzymujemy $\sin\alpha \approx 1 - \kappa h$. Oznaczmy kąt nachylenia promienia do *poziomu* przez β; ponieważ jest on mały, więc $\beta \approx \sin\beta = \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \approx \sqrt{2\kappa h}$, a z drugiej strony $\beta \approx \mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{d}h/\mathrm{d}x$. Rozwiązaniem równania różniczkowego $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x = \sqrt{2\kappa h}$ jest funkcja

$$x(h) = \sqrt{\frac{2h}{\kappa}}.$$

Dla $h = 1{,}7\,\mathrm{m}$ zasięg x wynosi 1340 m.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2006

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **513** ($WT = 1{,}51$) i **514** ($WT = 1{,}96$) z numeru 1/2006

Adam Dzedzej	– Gdańsk	45,38
Marian Łupieżowiec	– Zerzydowice	42,55
Michał Kieza	– Warszawa	38,90
Michał Jastrzębski	– Warszawa	32,79

Witamy w Klubie 44: pan Adam Dzedzej z numerem członkowskim 102.

Zadania z matematyki nr 525, 526

Redaguje Marcin E. KUCZMA

525. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c, d, e układ równań
$$\begin{cases} a = c^2 + d^2 \\ b = d^2 + e^2 \\ c = e^2 + a^2 \\ d = a^2 + b^2 \\ e = b^2 + c^2 \end{cases}$$

526. Ile jest par przekątnych rozłącznych w n-kącie foremnym? (Przekątne rozłączne – nieprzecinające się wewnątrz wielokąta i niemające wspólnego końca.)

Zadanie 526 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2006

Przypominamy treść zadań:

521. Dwaj gracze na przemian piszą na tablicy liczby ze zbioru $\{1, 2, \ldots, N\}$ (N jest zadaną liczbą naturalną); zabronione jest napisanie liczby będącej dzielnikiem liczby już znajdującej się na tablicy. Gracz, który nie może wykonać ruchu, przegrywa. Który z graczy (rozpoczynający czy jego przeciwnik) ma strategię zwycięską?

522. Wyznaczyć wszystkie piątki liczb pierwszych a, b, c, d, p, spełniające równanie $(\frac{a}{b})^2 - (\frac{c}{d})^2 = p$.

521. Nazwijmy rozważaną grę G_N, a jej uczestników – A i B; gracz A rozpoczyna. Wykażemy, że (niezależnie od N) gracz A ma strategię zwycięską. Jest to oczywiste, gdy $N = 1$. Dalej zakładamy, że $N \geqslant 2$.

Niech G'_N oznacza grę, w której uczestnicy piszą liczby ze zbioru $\{2, 3, \ldots, N\}$, a pozostałe reguły są te same, co w G_N. Wiadomo (patrz: *Uwaga* 2), że w grze G'_N któryś z graczy ma strategię zwycięską. Jeśli ma ją rozpoczynający (w G'_N), to gracz A, rozpoczynający grę G_N, po prostu stosuje tę samą strategię. Po pierwszym ruchu użycie jedynki jest i tak zabronione, więc uczestnicy gry G_N grają faktycznie w grę G'_N; gracz A wygrywa.

Jeżeli w grze G'_N strategia zwycięska należy do drugiego gracza, to grając w grę G_N zawodnik A w pierwszym ruchu wybiera jedynkę i stawia gracza B w pozycji rozpoczynającego grę G'_N; strategię zwycięską (w G'_N) ma jego przeciwnik, czyli A – który dzięki temu wygrywa grę G_N.

Uwaga 1. To już całe rozwiązanie. Zostało wykazane *istnienie* strategii zwycięskiej dla A; nie został podany algorytm postępowania – ale też nikt o to nie pytał. Byłoby to zadanie znacznie trudniejsze.

Uwaga 2. Napisaliśmy: *Wiadomo... że ktoś ma...* Na ile jest to jednak wiedza powszechna? Może lepiej pokazać dowód, lub przynajmniej szkic.

Typowa gra to taka, w której jest zadany skończony zbiór stanów (konfiguracji rekwizytów: pionków na planszy, bierek w stosach, lub – jak tutaj – liczb na tablicy) oraz zbiór przejść z pewnych stanów do innych; zakłada się przy tym, że każdy ciąg dozwolonych przejść ma długość skończoną. Dwaj gracze na przemian wykonują ruchy od stanu do stanu; gracz, który nie może wykonać ruchu, przegrywa. (Rozważane w tym zadaniu gry G_N, G'_N należą do tej kategorii).

Mamy więc do czynienia z grafem skończonym, w którym pewne pary wierzchołków (stanów gry) są połączone skierowanymi krawędziami i nie ma zamkniętych cykli („każdy ciąg przejść ma długość skończoną”). Wystarczy wykazać, że da się pokolorować wszystkie wierzchołki takiego grafu dwoma kolorami (zielony, czerwony) tak, by były spełnione następujące warunki:

- każdy punkt, z którego nie wychodzi żadna strzałka, jest czerwony;
- z każdego punktu zielonego wychodzi co najmniej jedna strzałka do punktu czerwonego;
- z każdego punktu czerwonego wszystkie strzałki prowadzą do punktów zielonych.

Przebieg gry – to naprzemienne przechodzenie po strzałkach od wierzchołka do wierzchołka. Gracz znajdujący się w punkcie zielonym (jeśli do niego należy wykonanie ruchu) ma strategię zwycięską – wystarczy, żeby stale lokował przeciwnika w pozycji czerwonej. Gracz znajdujący się w punkcie czerwonym, przy prawidłowej grze przeciwnika, przegrywa.

Dowód istnienia takiego pokolorowania biegnie przez łatwą indukcję względem liczby wierzchołków. Start oczywisty (graf jednowierzchołkowy). Krok indukcyjny: mamy dowolny skończony graf skierowany bez cykli; usuwamy dowolny wierzchołek, do którego nie dochodzi żadna strzałka (musi taki istnieć!) wraz z wychodzącymi z niego krawędziami; pozostałe punkty malujemy dwoma kolorami zgodnie z postawionymi warunkami (założenie indukcyjne); przywracamy usunięty punkt wraz z jego strzałkami i – w zależności od tego, czy choć jedna z tych strzałek trafia w punkt czerwony, czy nie – malujemy ów punkt na zielono lub na czerwono.

Z istnienia takiego pokolorowania wynika, że w każdej grze, o jakiej mowa w tej Uwadze, przy każdym stanie początkowym jeden z graczy ma strategię zwycięską.

522. Załóżmy, że liczby pierwsze a, b, c, d, p spełniają zadane równanie

(1) $$a^2d^2 - b^2c^2 = pb^2d^2.$$

Gdyby liczby b i d były różne, z równania (1) wynikałoby, że $b|a$, czyli $b = a$; wtedy jednak $p = 1 - (c/d)^2 < 1$, sprzeczność. Zatem $b = d$, i równanie wygląda tak:

(2) $$a^2 - c^2 = pb^2.$$

Przypuśćmy, że $c > 2$; wówczas liczby (pierwsze) a i c są nieparzyste, różnica ich kwadratów dzieli się przez 8, więc $p = b = 2$; jednak $a^2 - c^2 \geqslant (c+2)^2 - c^2 = 4c + 4 > 8$. Zatem $c = 2$, a równanie (2) przepisujemy jako $(a-2)(a+2) = pb^2$. Czynniki lewej strony są względnie pierwsze, skąd wniosek, że jeden z nich dzieli się przez b^2. Daje to alternatywę trzech układów równań:

$$\begin{cases} a - 2 = 1 \\ a + 2 = pb^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a - 2 = p \\ a + 2 = b^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a - 2 = b^2 \\ a + 2 = p. \end{cases}$$

Pierwszy układ natychmiast prowadzi do sprzeczności. Drugi daje równanie $b^2 = p + 4$, czyli $p = (b-2)(b+2)$, więc $b = 3$, $p = 5$, $a = 7$. Trzeci układ implikuje równości $a = b^2 + 2$, $p = b^2 + 4$. To mają być liczby pierwsze, przy tym większe od 5, więc niepodzielne przez 3, co ma miejsce jedynie dla liczby pierwszej $b = 3$. Stąd $a = 11$, $p = 13$. Znalezione piątki $(a, b, c, d, p) = (7, 3, 2, 3, 5)$ oraz $(11, 3, 2, 3, 13)$ spełniają równanie (1) i są jego jedynymi rozwiązaniami.