Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
511 ($WT = 2{,}63$) i **512** ($WT = 1{,}80$)
z numeru 12/2005

Janusz Olszewski	– Suwałki	47,39
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	45,46
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	42,55
Adam Dzedzej	– Gdańsk	42,30
Michał Kieza	– Warszawa	35,43
Michał Jastrzębski	– Warszawa	32,79

I znów dwa bardzo dobrze znane nazwiska – dwie niebagatelne powtórki wterańskie: Janusz Olszewski – po raz ósmy (!!), Tomasz Rawlik – po raz szósty (!).

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
412 ($WT = 2{,}75$) i **413** ($WT = 1{,}70$)
z numeru 2/2006

Mateusz Łącki	– Kraków	40,63
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	36,79
Konrad Kapcia	– Częstochowa	30,66
Tomasz Tkocz	– Rybnik	26,26
Jerzy Witkowski	– Radlin	14,12
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	11,80

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2006

Przypominamy treść zadań:

519. Czy istnieje nieskończony ciąg liczb dodatnich $a_1, a_2, a_3, \ldots$, dla którego szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_n^2}$ są oba zbieżne?

520. Na płaszczyźnie dane są dwa okręgi Ω_1 i Ω_2, o różnych promieniach i środkach (odpowiednio) O_1 i O_2, przecinające się w punktach A i B tak, że kąt O_1AO_2 jest prosty. Na odcinku AB obieramy dowolny punkt X różny od A, B oraz środka odcinka AB. Prosta O_1X przecina okrąg Ω_2 w punktach P_1 i Q_1, prosta O_2X przecina okrąg Ω_1 w punktach P_2 i Q_2, przy czym punkty P_1 i P_2 leżą na odcinkach O_1X i O_2X. Wykazać, że proste P_1P_2, Q_1Q_2 i O_1O_2 mają punkt wspólny i że ten punkt nie zależy od wyboru punktu X.

519. Odpowiedź przecząca wynika natychmiast z nierówności między średnimi ważonymi:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{n^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{a_n^2} \geqslant \left(\frac{a_n}{n^2}\right)^{2/3} \left(\frac{n}{a_n^2}\right)^{1/3} = \frac{1}{n}.$$

Jednoczesna zbieżność obu zadanych szeregów pociągałaby zbieżność szeregu $\sum 1/n$.

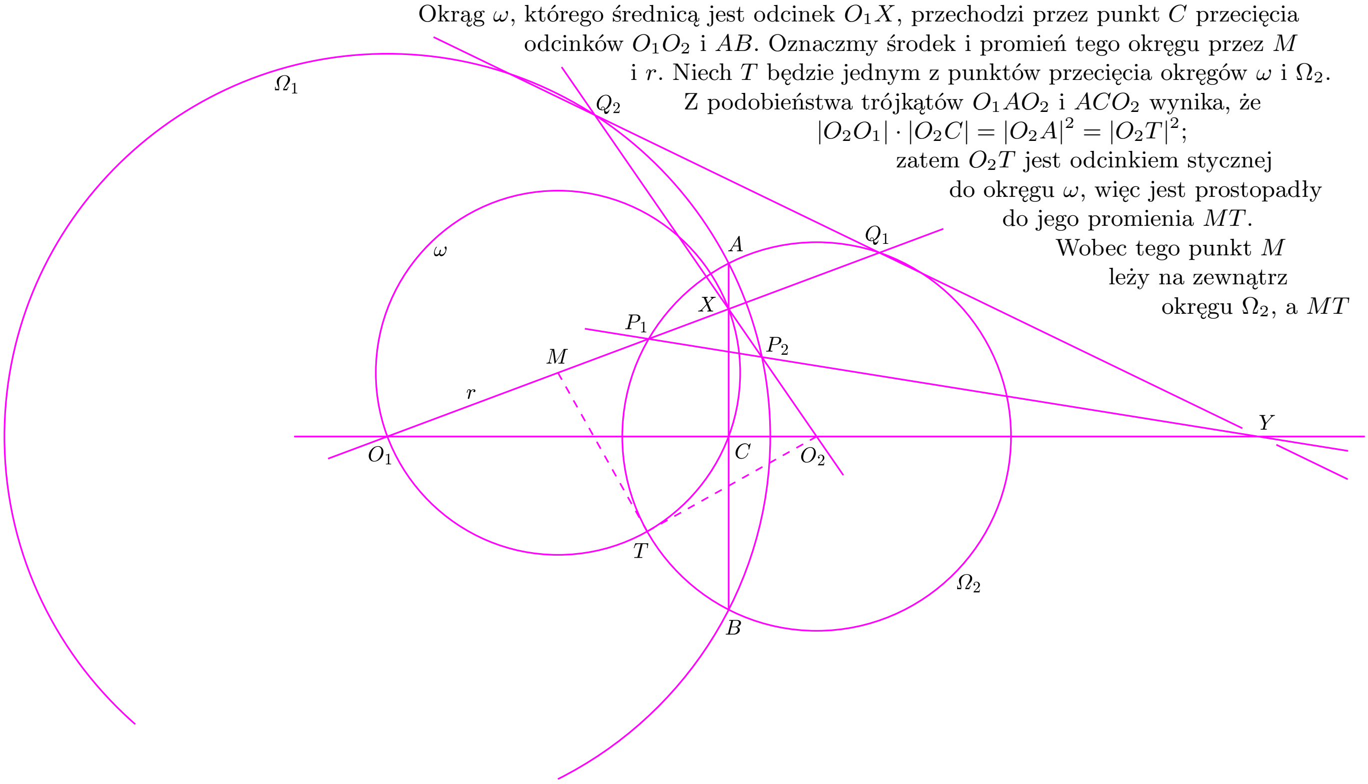
520. Rozpoczniemy od wykazania, że

$$\text{(1)} \qquad \frac{|XP_1|}{|O_1P_1|} = \frac{|XQ_1|}{|O_1Q_1|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|XP_2|}{|O_2P_2|} = \frac{|XQ_2|}{|O_2Q_2|}.$$

Okrąg ω, którego średnicą jest odcinek O_1X, przechodzi przez punkt C przecięcia odcinków O_1O_2 i AB. Oznaczmy środek i promień tego okręgu przez M i r. Niech T będzie jednym z punktów przecięcia okręgów ω i Ω_2. Z podobieństwa trójkątów O_1AO_2 i ACO_2 wynika, że

$$|O_2O_1| \cdot |O_2C| = |O_2A|^2 = |O_2T|^2;$$

zatem O_2T jest odcinkiem stycznej do okręgu ω, więc jest prostopadły do jego promienia MT. Wobec tego punkt M leży na zewnątrz okręgu Ω_2, a MT



jest odcinkiem stycznej do okręgu Ω_2; dostajemy równość $|MP_1|\cdot|MQ_1| = r^2$. Stąd

$$|O_1Q_1|\cdot|XP_1| = \bigl(r+|MQ_1|\bigr)\bigl(r-|MP_1|\bigr) = \\ = r\cdot\bigl(|MQ_1|-|MP_1|\bigr),$$

$$|O_1P_1|\cdot|XQ_1| = \bigl(|MP_1|+r\bigr)\bigl(|MQ_1|-r\bigr) = \\ = r\cdot\bigl(|MQ_1|-|MP_1|\bigr);$$

przyrównanie lewych stron daje pierwszą równość (1). Druga wynika z niej przez symetrię, bowiem rozumowanie nie zależało od tego, który z okręgów Ω_1, Ω_2 jest większy.

[Związki (1), w „mądrym języku”, orzekają, że punkty P_1, Q_1, O_1, X oraz P_2, Q_2, O_2, X tworzą czwórki harmoniczne – co można krócej uzasadnić, zauważając, że prosta AB jest jednocześnie biegunową punktu O_1 względem okręgu Ω_2 oraz biegunową O_2 względem okręgu Ω_1.]

Okręgi Ω_1 i Ω_2 nie są przystające, więc proste P_1P_2 i Q_1Q_2 przecinają prostą O_1O_2 w punktach, które oznaczymy odpowiednio przez Y i Z. Stosując do tych prostych oraz trójkąta O_1O_2X twierdzenie Menelausa, otrzymujemy równości

$$(2)\quad \frac{|O_1Y|}{|O_2Y|} = \frac{|O_1P_1|}{|XP_1|}\cdot\frac{|XP_2|}{|O_2P_2|} \quad\text{oraz}\quad \frac{|O_1Z|}{|O_2Z|} = \frac{|O_1Q_1|}{|XQ_1|}\cdot\frac{|XQ_2|}{|O_2Q_2|}.$$

Ich prawe strony są równe, wobec związków (1). Ponieważ punkty Y i Z leżą na prostej O_1O_2 poza odcinkiem O_1O_2, równość lewych stron wzorów (2) oznacza, że $Y = Z$; tak więc Y jest wspólnym punktem prostych P_1P_2, Q_1Q_2 i O_1O_2. Mnożymy równości (2) stronami:

$$\left(\frac{|O_1Y|}{|O_2Y|}\right)^2 = \alpha\cdot\beta,$$

gdzie $\alpha = \dfrac{|O_1P_1|\cdot|O_1Q_1|}{|O_2P_2|\cdot|O_2Q_2|}$, $\beta = \dfrac{|XP_2|\cdot|XQ_2|}{|XP_1|\cdot|XQ_1|}$.

Wartość α nie zależy od X; zaś w wyrażeniu β licznik i mianownik to potęgi punktu X względem okręgów Ω_2 i Ω_1. Dla punktu X leżącego na prostej AB potęgi te są równe. To pokazuje, że wartość stosunku $|O_1Y| : |O_2Y|$, a więc i położenie punktu Y na prostej O_1O_2, nie zależy od wyboru punktu X. (Nietrudno wykazać, że Y jest środkiem jednokładności okręgów Ω_2 i Ω_1.)

[Tezę zadania można też uzyskać rachunkiem na współrzędnych, umieszczając początek układu w punkcie C i przyjmując $A = (0,1)$ oraz (wobec prostopadłości $AO_1 \perp AO_2$): $O_2 = (k,0)$, $O_1 = (-1/k, 0)$. Niech $X = (0,w)$; współrzędne punktów P_i, Q_i, Y, Z dają się bez większych problemów obliczyć; wychodzi $Y = Z = ((k+1)/(1-k), 0)$, niezależnie od w.]

Klub 44

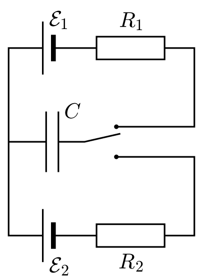
Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2006

Przypominamy treść zadań:

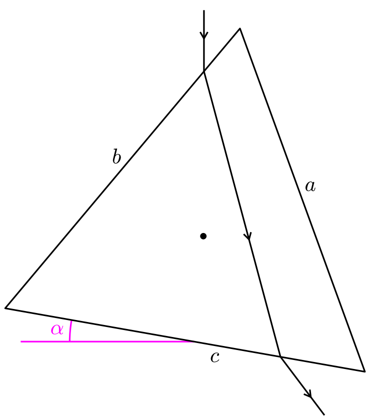
416. Ze szkła o współczynniku załamania 1,5 wykonano pryzmat o podstawie trójkąta równobocznego, skierowano na niego promień światła tak, że przedłużenie tego promienia przebiegało przez środek trójkąta i wprawiono pryzmat w ruch obrotowy. Podać zakres możliwych wartości kąta odchylenia promienia od kierunku początkowego (przedział lub przedziały). Pominąć częściowe odbicie światła towarzyszące załamaniu, natomiast uwzględnić ewentualne całkowite odbicie wewnętrzne.

417. Przełącznik na rysunku 1 jest przerzucany z górnego do dolnego położenia i na odwrót, przy czym czasy zetknięcia z dolnym i górnym stykiem są jednakowe. Częstotliwość przerzucania (lub – co na jedno wychodzi – pojemność kondensatora) jest tak duża, że po pewnym czasie zmiany napięcia na kondensatorze przestają być zauważalne. Jaka jest wtedy wartość tego napięcia? Wielkości oznaczone na rysunku są dane.



Rys. 1

416. Niech wyjściowym położeniem pryzmatu będzie takie, przy którym promień pada na krawędź, a kąt obrotu względem tego położenia oznaczmy przez α (rys. 2). Dla α bliskich zeru kąt padania na ścianę b wynosi 60°, kąt załamania $35{,}3^\circ$, kąt padania na ścianę c od wewnątrz $24{,}7^\circ$, a kąt załamania w powietrzu $38{,}9^\circ$ – i tyleż wynosi odchylenie. Wzrost α do $11{,}4^\circ$ zmniejsza odchylenie do wartości minimalnej, równej $37{,}2^\circ$ (wtedy przejście promienia przez pryzmat ma charakter symetryczny, tzn. wewnątrz pryzmatu promień biegnie równolegle do ściany a). Dalszy obrót pryzmatu doprowadza przy $\alpha = 32{,}1^\circ$ do całkowitego wewnętrznego odbicia od ściany c – tuż przed tym wychodzący pod kątem 90° z pryzmatu promień ulega odchyleniu o kąt $57{,}9^\circ$, a tuż po tym promień całkowicie odbity po wyjściu z pryzmatu przez ścianę a odchyli się o $115{,}8^\circ$. Następnie – jak można wykazać – kąt odchylenia jest równy $180^\circ - 2\alpha$ (niezależnie od współczynnika załamania) i dla α bliskiego 60° dąży do tej samej wartości 60°. Jeszcze większych wartości α nie musimy już analizować, gdyż dalej promień całkowicie odbija się od ściany a i wychodzi przez ścianę b, co daje te same wartości kątów odchylenia, tylko w przeciwną stronę.
Podsumowując, zakres możliwych kątów odchylenia składa się z dwóch przedziałów – od $37{,}2^\circ$ do $57{,}9^\circ$ oraz od 60° do $115{,}8^\circ$.



Rys. 2

417. Oznaczmy szukaną wartość napięcia na kondensatorze przez U. Wartość ta ustali się wtedy, gdy ładunek dopływający od jednego z ogniw przy odpowiednim położeniu klucza zrówna się z ładunkiem odpływającym do drugiego ogniwa przy przeciwnym przyłączeniu. Wobec jednakowych czasów zetknięcia równość tych ładunków jest równoważna równości natężeń prądu $\frac{\mathcal{E}_1-U}{R_1} = \frac{U-\mathcal{E}_2}{R_2}$. Rozwiązaniem jest $U = \frac{\mathcal{E}_1R_2+\mathcal{E}_2R_1}{R_1+R_2}$.