O średnich w trapezie

Janusz MATKOWSKI[*]

W artykule *Średnie w trapezie*, „Delta” 10(377)/2005, Joanna Jaszuńska daje geometryczne interpretacje czterech symetrycznych średnich: harmonicznej H, geometrycznej G, arytmetycznej A i kwadratowej K, jako długości pewnych poziomych odcinków w trapezie i, opierając się na tych interpretacjach, dowodzi znanych nierówności.

Wszystkie z wymienionych tutaj średnich należą do rodziny *średnich potęgowych ważonych* $A_w^{[p]} : (0,\infty)^2 \to (0,\infty)$, określonych wzorem

$$A_w^{[p]}(a,b) := \begin{cases} (wa^p + (1-w)b^p)^{1/p}, & p \neq 0, \\ a^w b^{1-w}, & p = 0. \end{cases}$$

dla $p \in \mathbb{R}$ oraz $w \in (0,1)$. Liczbę w nazywa się *wagą średniej.* Łatwo sprawdzić, że

$$\lim_{p\to 0} A_w^{[p]}(a,b) = a^w b^{1-w} = A_w^{[0]}(a,b).$$

Średnia $A_w^{[p]}$ jest symetryczna, tzn. spełnia warunek $A_w^{[p]}(a,b) = A_w^{[p]}(b,a)$ dla wszystkich $a, b > 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy $w = \frac{1}{2}$. Średnie $A^{[p]} := A_{1/2}^{[p]}$ nazywane są *średnimi potęgowymi.* Zauważmy, że

$$A = A^{[1]}, \qquad H = A^{[-1]}, \qquad K = A^{[2]}, \qquad G = A^{[0]}.$$

Średnia G odgrywa w rodzinie tych średnich centralną rolę. Mianowicie,

$$G \circ (A_w^{[p]}, A_w^{[-p]}) = G, \qquad p \in \mathbb{R}, w \in (0,1),$$

czyli G jest *niezmiennicza* ze względu na parę średnich $(A_w^{[p]}, A_w^{[-p]})$.

Odpowiadając na pierwsze z dwóch pytań J. Jaszuńskiej, dajemy tutaj interpretacje geometryczne niektórych średnich potęgowych ważonych oraz średnich ważonych kontra-harmonicznych.

Średnie arytmetyczne ważone. Ustalmy $w \in (0,1)$ i podzielmy trapez o podstawach długości a i b, $a \neq b$, odcinkiem równoległym do podstaw, o długości x, na dwa trapezy, w taki sposób, że przy oznaczeniach jak na rysunku 1,

$$\frac{h_a}{h_a + h_b} = w.$$

Wtedy $x = wa + (1-w)b = A_w(a,b)$ jest średnią arytmetyczną ważoną. Obracając trapez względem środka jednego z ramion o 180°, tak jak w artykule J. Jaszuńskiej, otrzymujemy równoległobok, który jest sumą dwóch trapezów (rys. 2). Przedłużenie odcinka o długości x dzieli obrócony trapez odcinkiem o długości y. Ponieważ $x + y = a + b$, więc $y = (1-w)a + wb = A_{1-w}(a,b)$, co oznacza, że

$$A\left(A_w(a,b), A_{1-w}(a,b)\right) = A.$$

Ta równość oznacza, że średnia arytmetyczna A jest niezmiennicza ze względu na parę średnich (A_w, A_{1-w}).

Średnie geometryczne ważone. Średnią geometryczną można także otrzymać, dzieląc trapez odcinkiem poziomym o długości x na dwa trapezy tak, aby ich przekątne o długości r i q były równoległe (rys. 3). Z podobieństwa trójkątów wynika, że

$$\frac{a}{q} = \frac{x}{r} \quad \text{i} \quad \frac{b}{r} = \frac{x}{q}, \qquad \text{a stąd} \quad x = \sqrt{ab} = G(a,b).$$

Dla każdego $w \in (0,1)$ istnieje dokładnie jeden poziomy odcinek w trapezie o długości x, taki że $\frac{x}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^w$. Oczywiście $x = a^w b^{1-w} = A_w^{[0]}(a,b)$ jest średnią geometryczną ważoną. Czy takie odcinki mają jakąś ciekawszą interpretację geometryczną?

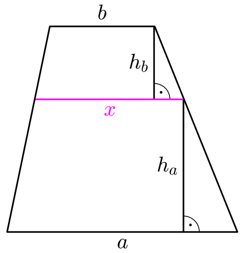
Rozwiązanie zadania M 1138.
Niech x_1 i x_2 będą pierwiastkami danego równania. Korzystając ze wzorów Viète'a, uzyskujemy

$$x_1 + x_2 = -a \quad \text{oraz} \quad x_1x_2 = 1 - b\,.$$

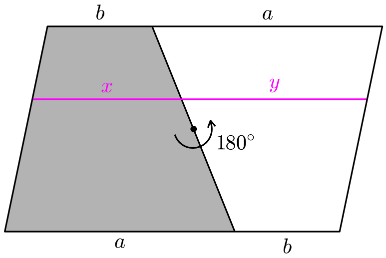
Stąd

$$a^2 + b^2 = (x_1+x_2)^2 + (1 - x_1x_2)^2 = (1+x_1^2)(1+x_2^2).$$

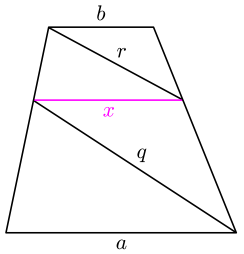
Oba czynniki są większe od 1, a więc liczba $a^2 + b^2$ jest złożona.



Rys. 1



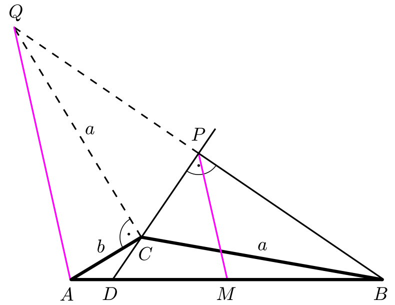
Rys. 2



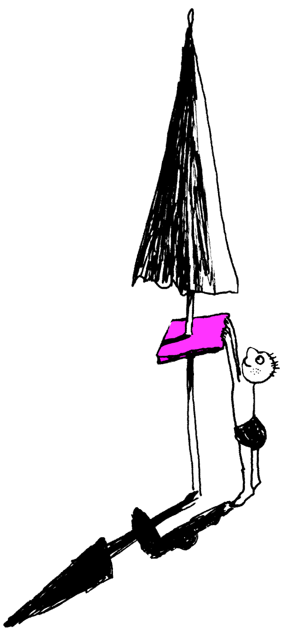
Rys. 3

[*]Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski

Rozwiązanie zadania M 1139.
Oznaczmy przez Q punkt symetryczny do punktu B względem punktu P.



Wówczas $BC = QC$ oraz $AQ = 2PM$. Ponadto
$$\sphericalangle ACD + \sphericalangle QCP = \sphericalangle ACD + \sphericalangle BCP = \sphericalangle ACD + (180^\circ - \sphericalangle BCD) = 90^\circ,$$
skąd otrzymujemy $\sphericalangle ACQ = 90^\circ$. Zatem
$$PM = \frac{1}{2}AQ = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + QC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$



Średnie kwadratowe ważone. Ustalmy dowolnie $w \in (0,1)$ i podzielmy trapez o polu S odcinkiem o długości x, równoległym do podstaw, na dwa trapezy o polach wS i $(1-w)S$. Przyjmując oznaczenia jak na rysunku 1, otrzymujemy
$$S = \frac{a+b}{2}(h_a + h_b) = \frac{a+b}{2}\left(\frac{2wS}{a+x} + \frac{2(1-w)S}{b+x}\right),$$
skąd wynika, że
$$x = A_w^{[2]}(a,b) := \sqrt{(1-w)a^2 + wb^2}.$$
Ponieważ $G \circ \left(A_w^{[2]}, A_w^{[-2]}\right) = G$, więc nasuwa się pytanie, czy również średnią $A_w^{[-2]}(a,b)$ można zinterpretować geometrycznie.

Średnie harmoniczne ważone. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1. Ponieważ pole trapezu jest sumą pól trapezów mniejszych, więc
$$(\star)\qquad \frac{a+b}{2}(h_a+h_b) = \frac{a+x}{2}h_a + \frac{x+b}{2}h_b.$$
Przyjmując tutaj, że $w\frac{h_b}{h_a} = (1-w)\frac{b}{a}$ dla pewnego $w \in (0,1)$, otrzymujemy
$$x = \frac{ab}{wa + (1-w)b} = A_w^{[-1]}(a,b),$$
a więc x jest średnią harmoniczną ważoną a i b z wagą w. Jeśli $\frac{h_b}{h_a} = \frac{b}{a}$, to
$$x = \frac{2ab}{a+b} = A_{1/2}^{[-1]}(a,b) = H(a,b).$$

Średnie kontra-harmoniczne ważone. Przyjmując, że $(1-w)\frac{h_b}{h_a} = w\frac{a}{b}$ dla pewnego $w \in (0,1)$, z $(\star)$, po prostych rachunkach, otrzymujemy
$$x = H_w^*(a,b) := \frac{wa^2 + (1-w)wb^2}{wa + (1-w)b}.$$
Gdy $\frac{h_b}{h_a} = \frac{a}{b}$ (tj. dla $w = \frac{1}{2}$), otrzymujemy stąd
$$x = H^*(a,b) = \frac{a^2+b^2}{a+b}.$$
Funkcja $H_w^* : (0,\infty)^2 \to (0,\infty)$ jest średnią (bo $\min(a,b) \leqslant H_w^*(a,b) \leqslant \max(a,b)$) i nazywa się *średnią kontra-harmoniczną ważoną*, a średnia $H^* := H_{1/2}^*$ – *średnią kontra-harmoniczną*. Motywacją ich nazwy jest łatwa do sprawdzenia relacja
$$A \circ (H_w, H_w^*) = A,$$
która oznacza, że średnia arytmetyczna A jest niezmiennicza ze względu na parę średnich (H_w, H_w^*). Średnia H^* należy do rodziny średnich Giniego $M^{[p]} : (0,\infty)^2 \to (0,\infty)$ określonych następująco:
$$M^{[p]}(a,b) := \frac{a^p + b^p}{a^{p-1} + b^{p-1}}, \qquad (p \in \mathbb{R}).$$
Zauważmy, że $M^{[1]} = A$, $M^{[1/2]} = G$ i $M^{[0]} = H$ oraz, że $M^{[p]}$ nie jest średnią potęgową dla $p \notin \left\{1, \frac{1}{2}, 0\right\}$

Uwaga. Można udowodnić, że dla dowolnych dwóch średnich istnieje dokładnie jedna ich średnia niezmiennicza. Na ogół nie daje jej się zapisać efektywnym wzorem, jednak zawsze jest ona granicą łatwego do skonstruowania ciągu rekurencyjnego. Ważnym przykładem zastosowania średnich niezmienniczych jest średnia M spełniająca równanie $M \circ (A,G) = M$, zwana *średnią arytmetyczno-geometryczną*. Otrzymuje się ją ze wzoru
$$M(a,b) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n b_n},$$
gdzie ciąg $(a_n, b_n)_{n=0}^{\infty}$ określony jest rekurencyjnie:
$$(a_0, b_0) := (a,b), \qquad (a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n+b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right), \qquad n = 0, 1, \ldots,$$
czyli $M(a,b) = \lim_{n\to\infty}(A,G)^n(a,b)$, gdzie $(A,G)^n$ oznacza n-tą iterację odwzorowania (A,G). W 1799 roku Gauss zauważył, że przybliżenia średniej M pozwalają na szybkie obliczanie pewnych całek eliptycznych.