Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **509** ($WT = 1{,}29$) i **510** ($WT = 2{,}15$) z numeru 11/2005

Paweł Najman	– Jaworzno	46,93
Janusz Olszewski	– Suwałki	43,23
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	42,36
Adam Dzedzej	– Gdańsk	38,40

Paweł Najman: „44” już po raz drugi.

W liście ligowej w *Delcie* 5/2006 zamieniłem WT zadań. Powinno być **505** ($WT = 4{,}00$) i **506** ($WT = 1{,}65$). Przepraszam. *MK*

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **410** ($WT = 2{,}28$) i **411** ($WT = 3{,}03$) z numeru 1/2006

Mateusz Łącki	– Kraków	40,63
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	33,71
Konrad Kapcia	– Częstochowa	28,96
Tomasz Tkocz	– Rybnik	24,28
Jacek Konieczny	– Poznań	15,22
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	11,29
Jerzy Witkowski	– Radlin	11,13

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2006

Przypominamy treść zadań:

517. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych x, y, dla których każda z liczb $2x+y$, $3x-2y$, $11x+9y$ jest kwadratem liczby całkowitej.

518. Zbiór $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ został podzielony w dowolny sposób na trzy rozłączne zbiory n-elementowe A, B, C (n jest dowolną liczbą naturalną). Udowodnić, że istnieją liczby $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, z których jedna jest równa sumie dwóch pozostałych.

517. Jedyną parą o wymaganej własności jest $x = 0$, $y = 0$. Dowód: załóżmy, zgodnie z warunkiem zadania, że

$$2x + y = u^2, \qquad 3x - 2y = v^2, \qquad 11x + 9y = w^2$$

dla pewnych liczb całkowitych u, v, w. Otrzymujemy równość

$$(*) \qquad v^2 + w^2 = 7u^2.$$

Gdyby liczby v oraz w były niepodzielne przez 7, ich kwadraty dawałyby przy dzieleniu przez 7 reszty 1, 2 lub 4 i równość $(*)$ nie mogłaby zachodzić. Zatem v, w dzielą się przez 7, ich kwadraty dzielą się przez 7^2, więc u dzieli się przez 7; dla liczb całkowitych $u_1 = u/7$, $v_1 = v/7$, $w_1 = w/7$ zachodzi równość analogiczna do $(*)$. Kontynuując to rozumowanie, stwierdzamy indukcyjnie, że każda z liczb u, v, w dzieli się przez 7 w dowolnie wysokiej potędze naturalnej – a to znaczy, że $u = v = w = 0$. Stąd także $x = y = 0$.

518. Można przyjąć, że liczba 1 jest w zbiorze A, i że najmniejsza liczba b, która nie należy do A, jest w zbiorze B; liczba $a = b - 1$ jest więc w zbiorze A. Wykażemy, że wówczas pewna liczba ze zbioru C jest sumą liczby ze zbioru A i liczby ze zbioru B.

Przypuśćmy najpierw, że żadne dwie kolejne liczby nie należą do zbioru C. Zbiór $C' = \{c-1\colon\ c \in C\}$ jest więc rozłączny z C, czyli zawiera się w sumie $A \cup B$. Przy tym C' jest zbiorem n-elementowym, nie identycznym z A (bo $1 \in A \setminus C'$). Zatem pewien element $c' \in C'$ należy do zbioru B. Liczba $c = 1 + c'$ należy do C i jest sumą liczb $1 \in A$, $c' \in B$; mamy tezę zadania.

Pozostaje rozpatrzeć sytuację, gdy w zbiorze C jest co najmniej jedna para liczb kolejnych; niech c, d będzie najwcześniejszą taką parą ($c, d \in C$; $d = c+1$). Weźmy pod uwagę liczbę $f = d - b$.

Jeżeli $f \in A$, to równość $f + b = d$ daje tezę ($f \in A$, $b \in B$, $d \in C$).

Jeżeli $f \in B$, to równość $a + f = c$ daje tezę ($a \in A$, $f \in B$, $c \in C$).

Ostatnia możliwość: niech $f \in C$. Wtedy liczba $e = f - 1$ nie należy do C (bo para c, d jest najwcześniejszą parą kolejnych liczb w zbiorze C). Oczywiście $e = c - b$. W zależności od tego, czy e należy do A, czy do B, uzyskujemy żądane przedstawienie następująco:

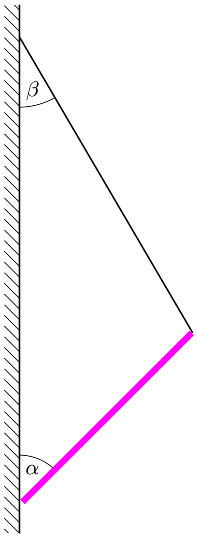
Gdy $e \in A$, równość $e + b = c$ daje tezę; gdy zaś $e \in B$, równość $1 + e = f$ daje tezę.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2006

Przypominamy treść zadań:

414. Jednorodna belka jednym końcem opiera się o pionową ścianę, tworząc z nią kąt α, a drugi jej koniec jest podtrzymywany przez linkę tworzącą ze ścianą kąt β (rys.). Jaki musi być współczynnik tarcia między belką a ścianą, aby belka nie zsunęła się w dół?



415. W pewnej metodzie rozdzielania dwóch izotopów A i B pewnego pierwiastka elementarną operacją jest rozdzielenie 2 moli mieszaniny zawierającej $2p_A$ moli izotopu A na 1 mol mieszaniny, w której stosunek liczb moli jest r razy większy od wyjściowego

$$\frac{p'_A}{p'_B} = \frac{p_A}{p_B} r$$

i 1 mol pozostałości. Ponadto na każdym etapie dopuszczalne jest łączenie (mieszanie) dowolnie wybranych próbek. Jeśli $r = 1{,}03$, to ile elementarnych operacji trzeba przeprowadzić, aby z 1000 moli mieszaniny o składzie 50%A i 50%B wyodrębnić 400 moli mieszaniny zawierającej 80% izotopu A? Wystarczy odpowiedź przybliżona.
Wskazówka: Rozwiązanie może być oparte na obliczeniach komputerowych, albo też na wzorach na entropię mieszaniny.

414. Warunek równowagi względem obrotu belki wokół punktu oparcia jej o ścianę pozwala wyznaczyć siłę napięcia linki

$$F = P\frac{\sin\alpha}{2\sin(\alpha+\beta)},$$

gdzie P – ciężar belki. Ponieważ siła nacisku N jest równa $F\sin\beta$, a siła tarcia $T = P - F\cos\beta$, więc po przekształceniach wyznaczamy minimalną wartość współczynnika tarcia $\mu = T/N = \operatorname{ctg}\beta + 2\operatorname{ctg}\alpha$.

415. Entropia mieszaniny dwóch składników jest dana wyrażeniem

$$S = -n_A \ln\frac{n_A}{n} - n_B \ln\frac{n_B}{n},$$

gdzie n_A i n_B są odpowiednimi liczbami moli, $n = n_A + n_B$. Według tego wzoru należy obliczyć entropię 2 moli mieszaniny wyjściowej, w której udziały składników A i B wyrażają się ułamkami $p_A = n_A/n$, $p_B = n_B/n$. W części „wzbogaconej” udziały A i B wynoszą – zgodnie z podanym wzorem

$$p'_A = \frac{p_A r}{1 - p_A + p_A r}, \qquad p'_B = 1 - p'_A,$$

a w części „zubożonej” mamy

$$p''_A = 2p_A - p'_A, \qquad p''_B = 1 - p''_A.$$

Łączna entropia obu uzyskanych części jest mniejsza od wyjściowej, a różnica $S_1 = S - S' - S''$ jest miarą efektu operacji elementarnej. Wartość liczbowa powyższej różnicy zależy wprawdzie od udziałów początkowych (od p_A), ale wobec przyjętych danych jest to zależność słaba i można przyjąć $S_1 \approx 0{,}00018$ (dokładniej, S_1 osiąga maksimum równe 0,00022 dla $p_A = 0{,}5$, a dla $p_A = 0{,}8$ jej wartość spada do 0,00014). Teraz pozostaje obliczyć entropię 1000 moli mieszaniny początkowej ($S_{pocz} = 693{,}1$) oraz łączną entropię 400 moli mieszaniny o składzie 80% A i 20% B oraz 600 moli reszty ($S_{ko\acute{n}c} = 566{,}7$). W wyniku podzielenia $S_{pocz} - S_{ko\acute{n}c}$ przez S_1 otrzymujemy szukaną liczbę elementarnych operacji równą około 700 tysięcy.

W metodzie „komputerowej” autor podzielił mieszaninę na 50 pojemników po 20 moli, a w każdym etapie procedury wprowadził cztery kroki:

1. zawartość każdego pojemnika zostaje rozdzielona na 10 moli części wzbogaconej i 10 moli części zubożonej (500 elementarnych operacji),
2. część zubożona n-tego pojemnika zostaje połączona z częścią wzbogaconą pojemnika o numerze $n+1$; powstaje w ten sposób 49 porcji po 20 moli, a część wzbogacona pierwszego pojemnika i część zubożona ostatniego pozostają oddzielnie,
3. każda z 49 porcji zostaje znów rozdzielona na 10 moli części wzbogaconej i 10 moli części zubożonej (490 elementarnych operacji),
4. część wzbogacona pierwszej z tych porcji łączy się z poprzednio pozostawioną częścią w pierwszym pojemniku, część zubożona ostatniej - analogicznie w ostatnim pojemniku, pozostałe łączą się parami jak w punkcie 2.

Procedurę powtarza się do momentu, w którym łączna zawartość składnika A w pierwszych 20 pojemnikach przekroczy 80% (320 moli) – okazuje się, że trzeba powtarzać powyższą pętlę 1442 razy, czyli liczba elementarnych operacji wynosi $1442 \cdot 990 \approx 1{,}4$ miliona. Liczbę tę można zmniejszyć do około 1,3 mln, pozostawiając w końcowych etapach tylko operacje istotne dla ostatecznego wyniku (w okolicach pojemnika o numerze 20). Czy istnieje lepszy algorytm, który pozwoli zbliżyć liczbę operacji do wymienionej wyżej wartości 700 tysięcy? Okaże się to po przejrzeniu listów od Czytelników.