Hipoteza Beala

Michał ADAMASZEK[*]

Już od 1994 roku wiadomo, głównie za sprawą Andrew Wilesa, że prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Wielkie Twierdzenie Fermata (WTF). Jeżeli $n \geqslant 3$ jest liczbą naturalną, to równanie

$$x^n + y^n = z^n$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.

Jak uczy historia, udzielenie odpowiedzi na jakieś pytanie nie zamyka zwykle sprawy, ale prowadzi do szeregu nowych pytań. Tak jest też i w tym przypadku, a jednym z problemów czekających na rozstrzygnięcie jest tytułowa hipoteza.

Zanim przejdziemy do sedna, kilka słów o Andrew Bealu, bo tak nazywa się autor hipotezy. Wbrew temu, co można sądzić, nie jest on zawodowym matematykiem, choć jego profesja ma z matematyką sporo wspólnego. Andrew Beal zajmuje się mianowicie mnożeniem, a konkretnie pomnażaniem pieniędzy. Jest on bowiem właścicielem banku w Dallas w Teksasie, a matematyką zajmuje się amatorsko. Jak stał się autorem znanej hipotezy? W dobie informatyzacji banki posługują się licznymi komputerami, z których jednak sporo przez pół doby stoi bezczynnie. Aby nie marnować mocy obliczeniowej, Beal zaprogramował je do szukania rozwiązań równania Fermata – a nuż jakieś istnieje. Dopiero sukces Wilesa pokazał, że można spokojnie dać procesorom odpocząć i Beal postanowił zająć siebie i komputery czymś innym. Zwrócił się mianowicie ku następującemu, ogólniejszemu równaniu:

$$x^a + y^b = z^c, \quad a, b, c \geqslant 3, \quad x, y, z \geqslant 1,$$

$$a, b, c, x, y, z \text{ całkowite},$$

w którym dopuszczamy różne wykładniki. Nazwijmy je, dla odróżnienia od poprzedniego, *równaniem Beala*.

Możemy przez chwilę sami poszukać rozwiązań, a jest ich całe mnóstwo. Na przykład

$$2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Albo ogólniej:

$$[x(x^n + y^n)]^n + [y(x^n + y^n)]^n = (x^n + y^n)^{n+1}.$$

Można też otrzymać mnóstwo sporadycznych rozwiązań. Robimy to następująco: bierzemy prawie dowolną tożsamość arytmetyczną, na przykład,

$$3^3 + 1 = 28$$

i mnożymy obie strony przez, dajmy na to, 28^6, otrzymując

$$2352^3 + 28^6 = 28^7.$$

Oto bardziej wyrafinowany przykład w podobnym stylu:

$$5^3 + 3 = 2^7 \qquad | \cdot 3^{21},$$

$$10935^3 + 3^{22} = 54^7.$$

Rozważając przykłady tego typu, Beal doszedł do wniosku, że nie zna innych metod otrzymywania rozwiązań swojego równania, niż pomnożenie obu stron jakiejś tożsamości przez liczbę większą od 1. Komputerowa weryfikacja wielu początkowych rozwiązań potwierdziła to spostrzeżenie i doprowadziła Beala do sformułowania hipotezy:

Hipoteza Beala (HB). Jeżeli liczby naturalne $x, y, z \geqslant 1$ oraz $a, b, c \geqslant 3$ spełniają równanie

$$x^a + y^b = z^c,$$

to $\mathrm{NWD}(x, y, z) > 1$.

Rozwiązania, w których $\mathrm{NWD}(x, y, z) = 1$, nazywamy *pierwotnymi.* Hipoteza stwierdza więc, że *równanie Beala nie ma rozwiązań pierwotnych.* Dotychczas żadne takie nie jest znane, wiadomo też, że nie ma ich gdy wszystkie sześć zmiennych jest z przedziału $[1, 100]$. Kilkoro zapaleńców, w tym Beal, prowadziło badania komputerowe, ale od czasu ogłoszenia hipotezy (w 1997 roku) nie zapadły w tej kwestii żadne rozstrzygnięcia.

Czy założenie $a, b, c \geqslant 3$ jest bardzo istotne, tak jak dla równania Fermata założenie $n \geqslant 3$? Tak, gdyż dopuszczenie wykładników równych 2 daje rozwiązania pierwotne, na przykład

$$2^5 + 7^2 = 3^4$$

albo bardziej egzotycznie

$$1414^3 + 2213459^2 = 65^7.$$

Można zapytać, jakiego kalibru jest problem znalezienia dowodu HB (gdyby miała się ona okazać prawdziwa). Wygląda na to, że jest to zadanie bardzo trudne, gdyż HB jest ogólniejsza od WTF, którego dowód okazał się, mówiąc oględnie, niezbyt elementarny. Zobaczmy, jak prostą konsekwencją HB jest WTF.

Stwierdzenie. HB $\Rightarrow$ WTF.

Dowód. Nie wprost i metodą regresji. Załóżmy, że równanie Fermata ma rozwiązania dla pewnego $n \geqslant 3$ i niech x, y, z będzie takim rozwiązaniem, że x jest możliwie najmniejsze. Takie rozwiązanie jest jednocześnie rozwiązaniem równania Beala, więc na mocy HB wnosimy, że $x = dx', y = dy', z = dz'$ dla pewnego $d > 1$ i całkowitych dodatnich x', y', z'. Ale wówczas $x'^n + y'^n = z'^n$ i mamy rozwiązanie z $x' < x$. Sprzeczność z minimalnością x kończy dowód.

Autor dowodu lub kontrprzykładu do hipotezy Beala może zyskać nie tylko sławę, ale też sporą gotówkę. Andrew Beal wyznaczył bowiem nagrodę w wysokości $\$10^5$ za rozstrzygnięcie prawdziwości hipotezy. Efekty już widać: pierwsi matematycy–hochsztaplerzy publikują w internecie swoje „dowody” (przypomnijmy, że Wielkie Twierdzenie Fermata też było swoistym Świętym Graalem dla rzesz matematyków–amatorów). Niemniej do tej pory prawdziwego postępu nie ma. Poszukiwaczy łatwego zarobku ostrzegam jednak: matematycy szukają dowodu, a komputery w Dallas kontrprzykładu już ładnych parę lat...

Więcej informacji: `http://www.bealconjecture.com` `http://www.math.unt.edu/~mauldin/beal.html`

[*]Student Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego