



# Dodatek Olimpijski

## Zadania II stopnia oraz finału

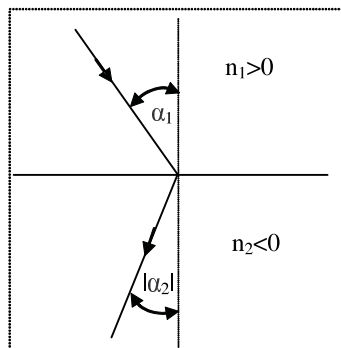
### Olimpiady Astronomicznej, Fizycznej i Matematycznej

#### LV OLIMPIADA FIZYCZNA 2005/2006

Komitet Główny Olimpiady Fizycznej: <http://www.kgof.edu.pl>

#### ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. Pewne sztucznie wytworzone materiały mogą mieć w wąskim zakresie częstotliwości fal elektromagnetycznych ujemny współczynnik załamania (dla mikrofal są to metamateriały utworzone z układów drutów, a dla światła widzialnego tzw. kryształy fotoniczne). Przy przejściu z ośrodka o współczynniku załamania  $n_1 > 0$  do ośrodka o współczynniku załamania  $n_2 < 0$  jest spełnione zwykle prawo załamania  $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$ , przy czym  $\alpha_2 < 0$  – patrz rysunek.



a) Mały przedmiot umieszczono w odległości  $a_p$  od płaskorównoległej płytki o grubości  $d$  wykonanej

z materiału o współczynniku załamania równym  $-1$ . Rozważmy obraz utworzony przez promienie, które przeszły przez płytkę. Znajdź jego położenie, powiększenie i ustawienie (tzn. czy jest on odbity, obrócony...). Dla jakich  $a_p$  rozważany obraz jest rzeczywisty?

b) Mały przedmiot umieszczono w punkcie o współrzędnych  $(a_p, -b_p, 0)$ , gdzie  $a_p > 0, b_p > 0$ . Obszar przestrzeni spełniający równania  $x > 0, y > 0$  jest wypełniony ośrodkiem o współczynniku załamania równym  $-1$ . Znajdź położenie, powiększenie i ustawienie obrazu tego przedmiotu, utworzonego przez promienie, które wyszły z obszaru o  $n = -1$ . Z jakich miejsc można zobaczyć ten obraz? Rozważ tylko promienie w płaszczyźnie  $z = 0$ .

W obu przypadkach narysuj bieg różnych promieni wybiegających z przedmiotu i przechodzących przez obszar o  $n = -1$ .

Współczynnik załamania przestrzeni poza płytką (w pkt. a) ) i poza obszarem  $x > 0, y > 0$  (w punkcie b)) jest równy 1.

2. Na prostym, poziomym odcinku drogi przeprowadzono testy samochodu. Ustalono, że minimalna droga hamowania tego samochodu od  $v_{100} = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  do  $0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  wynosi  $l = 40 \text{ m}$ .

Obliczyć minimalny czas osiągnięcia przez spoczywający początkowo samochód prędkości  $v_{100}$ , przy założeniu, że samochód może w każdej chwili w pełni wykorzystywać moc swojego silnika. Zakładamy, że warunki są dokładnie takie same jak w powyższym teście.

Samochód ma (wraz z kierowcą) masę  $m = 1000 \text{ kg}$ , moc silnika  $P = 50 \text{ kW}$ , oraz napęd i hamulce na wszystkie koła. Pomijamy opór powietrza, opory toczenia i wszystkie opory układu przeniesienia napędu. Nawierzchnia drogi była taka sama w każdym punkcie rozpatrywanego odcinka testowego. Samochód ma system optymalnie dobierający siłę hamowania każdego koła oraz układ optymalnie rozkładający moc silnika na każdą z osi.

3. Rozważmy prostokątną taflę lodu o wymiarach  $a \times b \times h$ , gdzie  $a \gg h$ ,  $b \gg h$ . Tafla ta przesuwa się z prędkością  $v$  po płaskiej, poziomej powierzchni.

Jakie jest największe  $v$ , przy którym tafla nie zacznie się topić? Tafla porusza się w takich warunkach, że temperatura jej górnej powierzchni jest równa  $T_{ot} = -10^\circ\text{C}$ .

Współczynnik przewodnictwa cieplnego lodu jest równy  $\lambda = 2,3 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$ , natomiast powierzchnia, po której przesuwa się tafla, nie przewodzi ciepła. Współczynnik tarcia suchej powierzchni lodu o tę powierzchnię jest równy  $f = 0,1$ . Obliczenia wykonaj dla

(i)  $a = 0,3 \text{ m}$ ,  $b = 0,3 \text{ m}$ ,  $h = 0,02 \text{ m}$ ,

(ii)  $a = 2 \text{ m}$ ,  $b = 2 \text{ m}$ ,  $h = 0,1 \text{ m}$  (fragment kry)

oraz dla

(iii)  $a = 30 \text{ m}$ ,  $b = 30 \text{ m}$ ,  $h = 2 \text{ m}$  (oderwany fragment lodowca w górach).

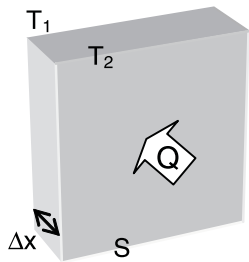
Gęstość lodu jest równa  $\rho_L = 900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , a przyspieszenie ziemskie  $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

Współczynnik przewodnictwa cieplnego danego ośrodka jest zdefiniowany następująco:

Rozważmy dwie równoległe, odległe o  $\Delta x$  warstwy ośrodka, o powierzchni  $S$  każda (patrz rysunek). Jeśli temperatury warstw wynoszą odpowiednio  $T_1$  i  $T_2$ , to

$$\lambda = \frac{Q/\Delta t}{S} \frac{\Delta x}{|T_2 - T_1|},$$

gdzie  $Q$  jest ilością ciepła przepływającego w ciągu czasu  $\Delta t$  od warstwy cieplejszej do chłodniejszej.



ii

**Zadanie doświadczalne.** Dwa oporniki ( $R_1$ ,  $R_2$ ) oraz kondensator  $C$  połączone w układ elektryczny. Elementy obwodu zostały umieszczone w zamkniętym, izolującym pudełku. W trzech punktach obwodu utworzono kontakty, które umieszczono na ściankach pudełka i oznaczono literami A, B oraz C. Można do nich podłączyć przewody elektryczne.

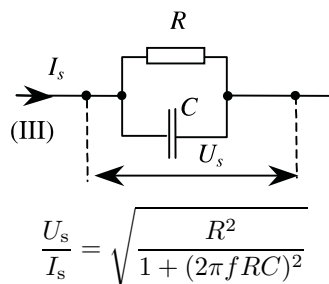
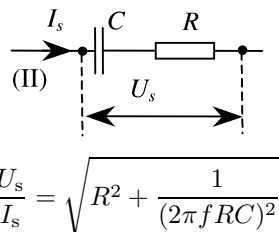
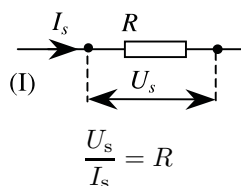
Mając do dyspozycji:

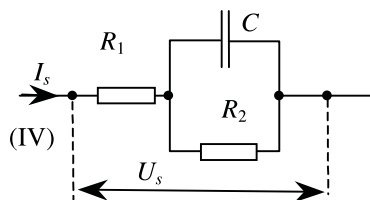
- woltomierz pozwalający na pomiar napięcia stałego oraz wartości skutecznej napięcia zmiennego,
- baterię 4,5 V,
- generator napięcia sinusoidalnego o częstotliwości regulowanej w zakresie  $20 \div 1000 \text{ Hz}$ ,
- opornik o oporze  $100 \Omega$ ,
- przewody i zaciski umożliwiające zestawienie układu pomiarowego,
- papier milimetryowy,

ustal, nie otwierając pudełka, schemat połączeń elementów w układzie elektrycznym zamkniętym w pudełku i wyznacz wartości oporów  $R_1$ ,  $R_2$  oraz pojemność  $C$  kondensatora.

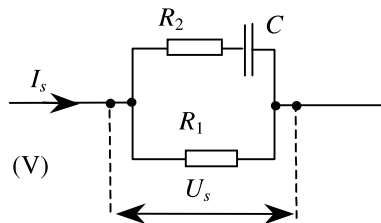
Wskazówka:

- 1) Przyjmij, że natężenie prądu płynącego przez woltomierz jest zanedbywane.
- 2) Dla przedstawionych poniżej obwodów elektrycznych zależność od częstotliwości  $f$  stosunku napięcia skutecznego  $U_s$  do prądu skutecznego  $I_s$  opisana jest następującymi wzorami:





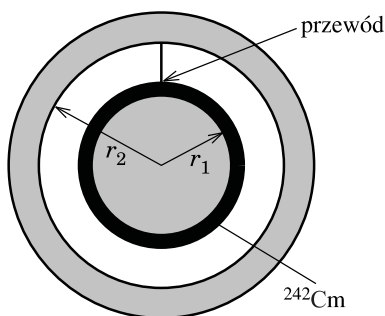
$$\frac{U_s}{I_s} = \frac{\sqrt{[R_1 + R_2 + R_1(2\pi f R_2 C)^2]^2 + R_2^2(2\pi f R_2 C)^2}}{1 + (2\pi f R_2 C)^2}$$



$$\frac{U_s}{I_s} = \frac{\sqrt{[R_1 + R_1 R_2 (R_1 + R_2)(2\pi f C)^2]^2 + R_1^4(2\pi f C)^2}}{1 + (R_1 + R_2)^2(2\pi f C)^2}$$

## ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

1. Metalowa kulka o promieniu  $r_1 = 10$  cm jest otoczona, współśrodkową z nią, metalową, sferyczną powłoką o promieniu wewnętrznym  $r_2 = 2r_1$  (patrz rys. 1). Między powłoką a kulką panuje próżnia. Kulka jest pokryta cienką, równomierną warstwą izotopu kiuru  $^{242}\text{Cm}$  w ilości  $n = 0,01$  mola. Jądro  $^{242}\text{Cm}$  rozpada się, wysyłając cząstkę alfa o energii  $E_0 \approx 6,1$  MeV. Czas połowicznego zaniku kiuru wynosi  $t_{1/2} = 163$  dni. Powłoka jest połączona z kulką biegnącym radialnie cienkim przewodem. Przyjmujemy, że obecność przewodu i płynący w nim prąd nie wpływają na pole elektryczne między powłokami. Cząstki alfa są całkowicie pochłaniane przez powłokę oraz kulkę, ale nie są pochłaniane ani rozpraszane przez kiur.



Rys. 1

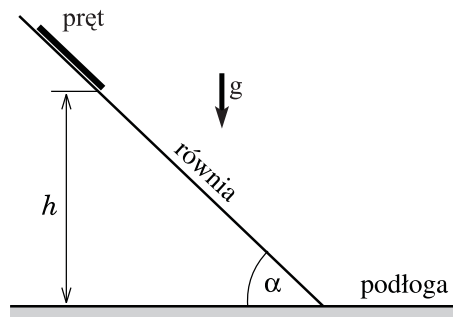
- Jakie jest natężenie prądu płynącego w przewodzie, jeśli jego opór jest równy  $R_1 = 100$  k $\Omega$ ?
- Jaki powinien być opór  $R_2$  przewodu, aby natężenie płynącego w nim prądu było równe połowie natężenia prądu określonego w pkt. a)?

Liczba Avogadro  $N_A \approx 6,0 \cdot 10^{23}$  mol $^{-1}$ , wartość ładunku elektronu  $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Pomijamy emisję elektronów z kulki i otaczającej ją powłoki.

Rozważamy sytuację stacjonarną, tzn. po (przybliżonym) ustaleniu się natężenia prądu w przewodzie, przez czas mały w porównaniu z  $t_{1/2}$ .

2. Pręt o długości  $l$  i masie  $m$  położono na równi o kącie nachylenia  $\alpha$  (patrz rys. 2), na wysokości  $h$  nad podłogą (przy czym  $h \gg l$ ).

- Opisz jakościowo ruch pręta.
- Wyznacz prędkość pręta w ostatniej fazie ruchu. Podaj wartość liczbową dla  $h = 6,4$  m,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $g = 10$  m/s $^2$  (przyspieszenie ziemskie).

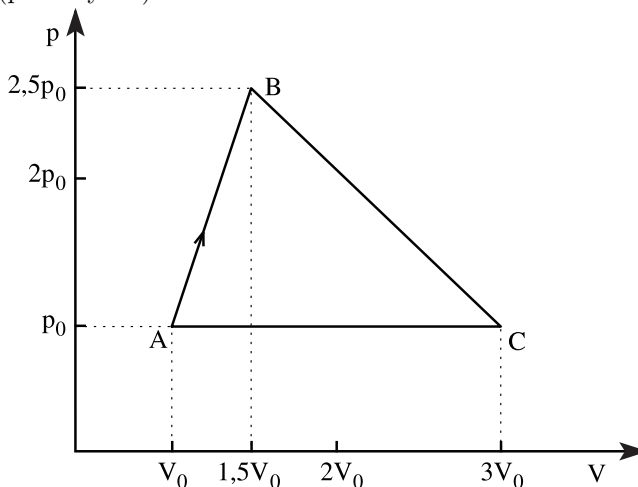


Rys. 2

Tarcie i opór powietrza zanedbujemy. Pręt jest idealnie sztywny i cały czas znajduje się w płaszczyźnie pionowej prostopadłej do powierzchni równi. Podłoga i równia idealnie amortyzują uderzenia, tzn. powodują, że tuż po uderzeniu prostopadła do nich składowa prędkości uderzanego punktu jest równa 0, a ich ugięcie w trakcie uderzenia jest znikomo małe.

Moment bezwładności pręta względem środka masy jest równy  $I = (1/12)ml^2$ . W chwili początkowej pręt spoczywał. Kąt nachylenia spełnia warunek  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , przy czym  $\alpha$  nie jest bliskie  $90^\circ$ .

3. Pewien konstruktor zbudował skomplikowany silnik cieplny, którego czynnikiem roboczym jest  $n$  moli jednoatomowego gazu doskonałego (molowe ciepło właściwe równe  $(3/2)R$ ) pracującego w cyklu tworzącym na wykresie  $p - V$  trójkąt ABC o wierzchołkach w punktach  $(V_0, p_0)$ ,  $((3/2)V_0, (5/2)p_0)$ ,  $(3V_0, p_0)$  (patrz rys. 3).



Rys. 3

Gaz pobiera ciepło ze źródła ciepła o temperaturze  $T_1$  i oddaje je do chłodnicy o temperaturze  $T_2$ .

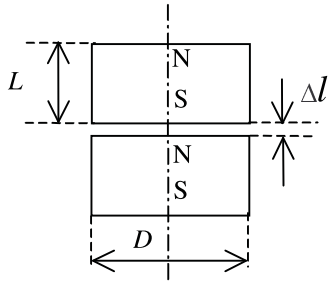
Przyjmujemy, że gaz jest w każdym momencie cyklu w stanie równowagi termodynamicznej i pomijamy wszelkie opory mechanizmów.

a) Oblicz sprawność tego silnika.

b) Jakie warunki muszą spełniać temperatury  $T_1$  i  $T_2$ , aby silnik pracował?

### Zadanie doświadczalne.

Rozważmy dwa magnesy walcowe o wysokości  $L$  i średnicy  $D$ , jednorodnie namagnesowane w kierunku osi walca. Jeśli takie magnesy są rozsunięte na niewielką odległość  $\Delta l \ll L$ ,  $\Delta l \ll D$  (rys. 4), to pole magnetyczne w szczelinie pomiędzy nimi jest w przybliżeniu jednorodne i prostopadłe do podstaw magnesów.



Rys. 4

Przy rozsuwaniu magnesów na odległość  $\Delta l$  wartość indukcji  $B$  nie zmienia się, a towarzyszącą temu zmianę

energii pola magnetycznego można wyrazić jako:

$$\Delta E = \frac{1}{2\mu\mu_0} B^2 S \Delta l,$$

gdzie,

$S$  – powierzchnia podstawy walca,

$\mu_0$  – przenikalność magnetyczna próżni,

$\mu$  – względna przenikalność magnetyczna ośrodka w szczelinie pomiędzy magnesami.

Masz do dyspozycji:

- dwa jednakowe magnesy neodymowe w kształcie walca (namagnesowane jednorodnie w kierunku osi walca),
- zagięty na końcu pasek niemagnetycznej ( $\mu = 1$ ) blachy o masie równej  $(21 \pm 1)$  g,
- puszkę wykonaną z blachy ferromagnetycznej, wypełnioną przetworami owocowymi,
- 1 kg cukru w kostkach,
- torebkę plastikową,
- krzesło z płaskim drewnianym siedziskiem,
- klocek,
- linijkę.

Wyznacz wartość indukcji  $B$  pola magnetycznego w szczelinie pomiędzy dwoma przyciągającymi się magnesami (patrz rys. 4).

Przenikalność magnetyczna próżni wynosi  $\mu_0 = 4\pi(10^{-7} \text{ VS/Am})$ .

## Laureaci LV Olimpiady Fizycznej 2006/2007

1. Michał Paweł Pilipczuk, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie, nauczyciel: dr Elżbieta Zawistowska; klasa III

2. Krzysztof Zbigniew Niemkiewicz, VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu, nauczyciel: mgr Marek Golka; klasa III

3. Marcin Piotr Sobczyk, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie, nauczyciel: dr Jerzy Mucha; klasa III

4. Tomasz Marek Smoleński, VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu, nauczyciel: mgr Marek Golka; klasa II

5. Tomasz Badowski, II LO im. Konstantego Ildefonsa Gałczyńskiego w Olsztynie, nauczyciel: mgr Anna Gut; klasa III

6. Michał Gawroński, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie, nauczyciel: mgr Stanisław Lipiński; klasa II

7. Arkadiusz Paweł Trawiński, IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu, nauczyciel: dr Jacek Jurkowski; klasa III

8. Marcin Pawłowski, IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu, nauczyciel: dr Jacek Jurkowski; klasa III

9. Piotr Tomasz Godlewski, Publiczne Gimnazjum Nr 23 przy ZSO Nr 6 im. Jana Kochanowskiego w Radomiu, nauczyciel: mgr Grażyna Bilewska; klasa III

10. Władysław Tadeusz Surała, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie, nauczyciel: mgr Robert Stasiak; klasa III

11. Adam Mariusz Ratajczak, VI LO im. Wacława Sierpińskiego w Gdyni, nauczyciel: mgr Dorota Cegielska; klasa III

12. Piotr Batog, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu, nauczyciel: mgr Marian Bąk; klasa III

13. Konrad Henryk Wypchło, II LO im. Stanisława Staszica w Starachowicach, nauczyciel: mgr Jacek Orzechowski; klasa III

14. Jakub Stanisław Kobak, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie, nauczyciel: mgr Grzegorz Depczyński; klasa III

15. Paweł Rafał Sznajder, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie, nauczyciel: mgr Robert Stasiak; klasa II

16. Juliusz Stasiewicz, I LO im. Adama Mickiewicza w Białymstoku, nauczyciel: mgr Andrzej Stasiewicz; klasa III

17. Kornel Maksymilian Maczyński, V LO im. w Bielsku-Białej, nauczyciel: mgr Ewa Gajda; klasa III

18. Marcin Stanisław Bieda, LO ss. Prezentek im. Jana Pawła II w Rzeszowie, nauczyciel: siostra mgr Agata Rozmus; klasa II

19. Karol Jakub Wędołowski, I LO im. Ziemi Kujawskiej we Włocławku, nauczyciel: mgr Mariusz Sobczak; klasa III

## ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA (24 lutego 2006)

1. Liczby całkowite dodatnie  $a, b, c, x, y, z$  spełniają równości  $a^2 + b^2 = c^2$ ,  $x^2 + y^2 = z^2$  oraz nierówności  $|x - a| \leq 1$ ,  $|y - b| \leq 1$ . Wykazać, że zbiory  $\{a, b\}$  oraz  $\{x, y\}$  są równe.

2. Dany jest trójkąt  $ABC$ , w którym  $AC + BC = 3AB$ . Okrąg o środku  $I$  wpisany w trójkąt  $ABC$  jest styczny do boków  $BC$  i  $CA$  odpowiednio w punktach  $D$  i  $E$ . Niech  $K$  i  $L$  będą punktami symetrycznymi odpowiednio do punktów  $D$  i  $E$  względem punktu  $I$ . Udowodnić, że punkty  $A, B, K, L$  leżą na jednym okręgu.

3. Liczby dodatnie  $a, b, c$  spełniają warunek  $ab + bc + ca = abc$ . Dowieść, że

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geq 1.$$

4. Niech  $c$  będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Ciąg  $(a_n)$  jest określony przez warunki

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = d(a_n) + c \text{ dla } n = 1, 2, \dots,$$

gdzie  $d(m)$  oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby  $m$ . Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia  $k$ , że ciąg  $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$  jest okresowy.

5. Punkt  $C$  jest środkiem odcinka  $AB$ . Okrąg  $o_1$  przechodzący przez punkty  $A$  i  $C$  przecina okrąg  $o_2$  przechodzący przez punkty  $B$  i  $C$  w różnych punktach  $C$  i  $D$ . Punkt  $P$  jest środkiem tego łuku  $AD$  okręgu  $o_1$ , który nie zawiera punktu  $C$ . Punkt  $Q$  jest środkiem tego łuku  $BD$  okręgu  $o_2$ , który nie zawiera punktu  $C$ . Dowieść, że proste  $PQ$  i  $CD$  są prostopadłe.

6. Dana jest liczba pierwsza  $p$  oraz liczba całkowita  $n$ , przy czym  $p \geq n \geq 3$ . Zbiór  $A$  składa się z  $n$ -wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru  $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$  i ma następującą własność:

Dla dowolnych dwóch ciągów  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  oraz  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  ze zbioru  $A$  istnieją takie różne liczby  $k, l, m$ , że  $x_k \neq y_k$ ,  $x_l = y_l$ ,  $x_m \neq y_m$ . Wyznaczyć największą możliwą liczbę elementów zbioru  $A$ .

## ZAWODY III STOPNIA (5 kwietnia 2006 r.)

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych  $a, b, c, d, e$  układ równań

$$\begin{cases} a^2 = b^3 + c^3 \\ b^2 = c^3 + d^3 \\ c^2 = d^3 + e^3 \\ d^2 = e^3 + a^3 \\ e^2 = a^3 + b^3 \end{cases}$$

2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie  $k$ , dla których liczba  $3^k + 5^k$  jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku naturalnym większym od 1.

3. Dany jest sześciokąt wypukły  $ABCDEF$ , w którym  $AC = DF$ ,  $CE = FB$  oraz  $EA = BD$ . Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

4. Na trójce liczb wykonujemy następującą operację. Wybieramy dwie spośród tych liczb i zastępujemy je

ich sumą oraz ich iloczynem, pozostała liczba nie ulega zmianie. Rozstrzygnąć, czy rozpoczynając od trójki  $(3, 4, 5)$  i wykonując tę operację możemy ponownie uzyskać trójkę liczb będących długościami boków trójkąta prostokątnego.

5. Dany jest czworościan  $ABCD$ , w którym  $AB = CD$ . Sfera wpisana w ten czworościan jest styczna do ścian  $ABC$  i  $ABD$  odpowiednio w punktach  $K$  i  $L$ . Dowieść, że jeżeli punkty  $K$  i  $L$  są środkami ciężkości ścian  $ABC$  i  $ABD$ , to czworościan  $ABCD$  jest foremny.

6. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych  $a, b$ , dla których istnieje taki wielomian  $P(x)$  o współczynnikach całkowitych, że iloczyn  $(x^2 + ax + b) \cdot P(x)$  jest wielomianem postaci  $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0$ , gdzie każda z liczb  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  jest równa 1 lub  $-1$ .

## Informacje o przebiegu LVII Olimpiady Matematycznej

I. W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1670 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 567 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 125 uczniów.

II. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 7 kwietnia br. postanowił przyznać 15 osobom tytuł laureata i nagrody pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 36 punktów możliwych):

### Nagrody stopnia pierwszego

I miejsce: Przemysław MAZUR (31 pkt.), uczeń klasy pierwszej II LO im. Króla Jana III Sobieskiego w Krakowie.

II miejsce: Wojciech ŚMIETANKA (30 pkt.), uczeń klasy drugiej III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni.

III miejsce: Michał PILIPCZUK (28 pkt.), uczeń klasy trzeciej XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

### Nagrody stopnia drugiego

IV miejsce: Marcin Dublański (26 pkt.), uczeń klasy drugiej I LO im. Edwarda Dembowskiego w Zielonej Górze.

Miejsca V–VII

Krzysztof DOROBISZ (24 pkt.), uczeń klasy trzeciej V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Maciej KUŹNIAR (24 pkt.), uczeń klasy trzeciej V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Maciej SKÓRSKI (24 pkt.), uczeń klasy trzeciej I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie.

VIII miejsce: Marta GÓRECKA (23 pkt.), uczennica klasy trzeciej XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

## Nagrody stopnia trzeciego

Miejsca IX–XII:

Joanna BOGDANOWICZ (**20 pkt.**), uczennica klasy pierwszej XIII LO w Szczecinie.

Kamil HERBA (**20 pkt.**), uczeń klasy trzeciej XIII LO w Szczecinie.

Jan SZEJKO (**20 pkt.**), uczeń klasy trzeciej XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Filip WOLSKI (**20 pkt.**), uczeń klasy trzeciej III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni.

Miejsca XIII–XV:

Marcin ANDRYCHOWICZ (**19 pkt.**), uczeń klasy pierwszej XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Jakub KALLAS (**19 pkt.**), uczeń klasy drugiej III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni.

Jakub KONIECZNY (**19 pkt.**), uczeń klasy pierwszej V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

**III.** Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na tym samym posiedzeniu postanowił wyróżnić 16 zawodników:

Miejsca XVI–XXIII:

Maciej Gawron (**18 pkt.**), uczeń klasy drugiej V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Albert Kamiński (**18 pkt.**), uczeń klasy trzeciej I LO im. Stanisława Staszica w Lublinie.

Marcin Kurczych (**18 pkt.**), uczeń klasy drugiej I LO im. Stefana Żeromskiego w Kielcach.

Artur Machno (**18 pkt.**), uczeń klasy trzeciej V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Marcin Skotniczny (**18 pkt.**), uczeń klasy trzeciej V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Tomasz Szarek (**18 pkt.**), uczeń klasy trzeciej III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu.

Tomasz Szumny (**18 pkt.**), uczeń klasy drugiej IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu.

Bogusław Wróblewski (**18 pkt.**), uczeń klasy trzeciej I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie.

Miejsca XXIV–XXVII:

Przemysław Chojecki (**17 pkt.**), uczeń klasy drugiej XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Karol Daszkiewicz (**17 pkt.**), uczeń klasy drugiej III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni.

Tomasz Kulczyński (**17 pkt.**), uczeń klasy drugiej VI LO im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy.

Wojciech Zaremba (**17 pkt.**), uczeń klasy drugiej XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu.

Miejsca XXVIII–XXXI:

Sławomir Kierat (**16 pkt.**), uczeń klasy trzeciej VIII LO im. Marii Skłodowskiej Curie w Katowicach.

Juliusz Kopczewski (**16 pkt.**), uczeń klasy trzeciej II Społecznego LO w Warszawie.

Juliusz Sompolski (**16 pkt.**), uczeń klasy piątej Gimnazjum i Liceum Akademickiego w Toruniu.

Maciej Wawro (**16 pkt.**), uczeń klasy drugiej LO im. Mikołaja Kopernika w Jarosławiu.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej dziękuje następującym osobom, które pomagały laureatom

i wyróżnionym uczniom w przygotowaniach do zawodów:

*Zbigniew Bobiński, Beata Bogdańska, Wojciech Boratyński, Łukasz Bury, Stanisław Buś, Piotr Butryn, Andrzej Bysiewicz, Lucyna Cięciwa, Karol Cwalina, Wojciech Czerwiński, Sławomir Dinew, Żywnomir Dinew, Maria Donten, Tomasz Dubrownik, Jacek Dymel, Tomasz Elsner, Małgorzata Fundakowska, Ryszard Gruca, Janusz Gwoździwicz, Witold Jarnicki, Joanna Jaszuńska, Jolanta Jerzy, Krzysztof Kapulkin, Grzegorz Kapustka, Michał Kapustka, Zbigniew Karczmarczyk, Michał Kijewski, Marek Kiszkiś, Jerzy Konarski, Alicja Kozak-Wnuczek, Artur Kozłowski, Bogusław Kraszewski, Lev Kurlyandchik, Michał Lasoń, Andrzej Lenarcik, Adam Makowski, Wojciech Martys, Michał Matuszczyk, Adam Neugebauer, Michał Niedźwiedz, Jakub Onufry Wojtaszczyk, Waldemar Pałuba, Piotr Pawlikowski, Henryk Pawłowski, Marcin Pilipczuk, Michał Pilipczuk, Teresa Piotrowska, Krystyna Skórnik, Michał Skrzypczak, Edward Stachowski, Maria Stańczykowska, Renata Suchanek, Przemysław Szczepaniak, Sławomir Śmiarowski, Wojciech Śmietanka, Wojciech Tomalczyk, Bartosz Walczak, Paweł Walter, Oskar Wantoła, Filip Wieczorek, Krzysztof Wilgucki i Tomasz Żukowski.*

**IV.** W skład delegacji polskiej na XLVII Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną, która odbędzie się w Słowenii w dniach 10–18 lipca br., powołani zostali:

*Krzysztof Dorobisz, Marcin Dublański, Przemysław Mazur, Michał Pilipczuk, Maciej Skórski i Wojciech Śmietanka.*

Zawodnicy rezerwowi:

*Maciej Kuźniar i Marta Górecka.*

**V.** Na XXIX Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne, które odbędą się w dniach 28 czerwca – 7 lipca br. w Polsce,

powołano delegację w składzie: *Przemysław Chojecki, Maciej Gawron, Marta Górecka, Jakub Konieczny, Maciej Kuźniar i Tomasz Szumny.*

Zawodnicy rezerwowi:

*Karol Daszkiewicz, Wojciech Zaremba i Maciej Wawro.*

**VI.** Powołano też delegację na XVII Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich, które odbędą się w Finlandii na początku listopada br. Skład tej delegacji jest następujący:

*Marcin Andrychowicz, Joanna Bogdanowicz, Jakub Kallas, Tomasz Kulczyński i Marcin Kurczych.*

Zawodnicy rezerwowi:

*Wojciech Zaremba, Karol Daszkiewicz i Maciej Wawro.*

**VII.** Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej odbędzie się w dniach 4–18 czerwca br. w Domu Wczasowym *Zgoda* w Zwardoniu. Na obóz ten zostały powołane następujące osoby:

*Marcin Andrychowicz, Joanna Bogdanowicz, Przemysław Chojecki, Karol Daszkiewicz, Krzysztof Dorobisz, Marcin Dublański, Maciej Gawron, Marta Górecka, Joachim Jelisiejew, Jakub Kallas, Jakub Konieczny, Marcin Kurczych, Maciej Kuźniar, Przemysław Mazur, Łukasz Mazurek, Maciej Skórski, Urszula Swianiewicz, Maciej Wawro i Wojciech Zaremba.*

Zawodnicy rezerwowi:

*Łukasz Wołochowski, Przemysław Jurewicz, Tomasz Kobos i Grzegorz Sobczak.*

Wskutek uwzględnienia ewentualnych odwołań składy powyższych delegacji mogą ulec zmianie.



## ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. Z okresowości przebiegu całkowitych zaćmień Słońca (cykl *saros*) wynika dziś, że pas zaćmienia całkowitego w dniu 14 stycznia 484 roku powinien wtedy przebiegać m.in. przez Hiszpanię. Okazało się jednak, że w tym dniu nie obserwowano tam zaćmienia całkowitego, tylko częściowe. Oblicz, gdzie na kuli ziemskiej przebiegał wówczas pas całkowitego zaćmienia.

Wskazówka: Pas całkowitego zaćmienia uległ przesunięciu w długości geograficznej ze względu na zmianę okresu obrotu Ziemi, wynikającą z hamowania pływowego. Zmiana ta powoduje, że w ciągu 100 lat doba słoneczna wydłuża się o 0,0016 sekundy.

2. Jaki jest promień orbity satelity Ziemi, który sięga wierzchołka stożka cienia rzucanego przez Księżyc w nowiu, gdy Księżyc jest odległy o 90 stopni od węzła swojej orbity i znajduje się w średniej odległości od Ziemi, a Ziemia w średniej odległości od Słońca? Potrzebne dane znajdź samodzielnie.

3. Dzięki szczęśliwej okoliczności, tzn. znajdującemu się w niewielkiej odległości kątowej radioźródła 3C 66A o przesunięciu ku czerwieni  $z = 0,44$ , udało się zmierzyć (metodą interferometrii wielkobazowej) położenia na sferze radioźródła 3C 66B o  $z = 0,0215$  w dwu różnych częstotliwościach. Okazało się, że radioźródło 3C 66B wykonuje ruch cykliczny z okresem  $1,05 \pm 0,03$  roku. Gdy do wspomnianych pomiarów spróbowano dopasować ruch keplerowski układu podwójnego, to okazało się, że rozmiary kątowe wielkiej półosi są różne dla obu częstotliwości i wynoszą:  $243 \pm 30$  i  $45 \pm 4$  mikrosekund łuku. Spróbuj wyjaśnić naturę tego źródła (czym jest i dlaczego są dwa różne rozmiary liniowe). Zakładając,

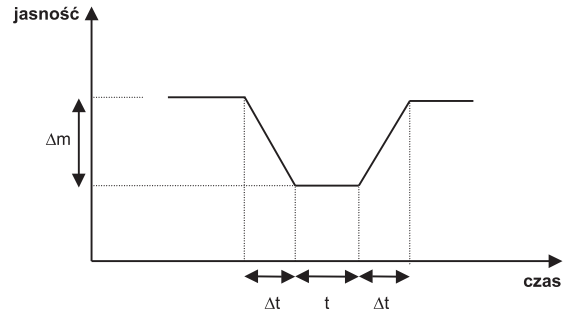
że składa się ono z dwóch równych mas, wywnioskuj, czym może być obserwowany obiekt.

W tym celu oszacuj:

- masę radioźródła,
- prędkość liniową ruchu w obu przypadkach (zakładając przybliżenie kołowe).

Zinterpretuj tak wysoką, wydawałoby się absurdalną, wartość prędkości. Aktualnie przyjmowana wartość stałej Hubble'a wynosi  $70 \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc})$ .

4. Minimum wtórne pewnej gwiazdy zmiennej zaćmieniowej jest identyczne z jej minimum głównym.



Różnica jasności w minimum i maksimum wyrażona w wielkościach gwiazdowych wynosi  $\Delta m$ . Zmiana jasności gwiazdy między wartościami ekstremalnymi trwa tak samo długo i wynosi  $\Delta t$ . Czas trwania tzw. płaskiego dna wynosi  $t$ .

- Znajdź ogólny warunek rozstrzygający, czy przy takich parametrach zaćmienia jest ono centralne.
- Korzystając z tego warunku, sprawdź, czy jest centralne zaćmienie w przypadku, gdy  $\Delta m = 0^m43$ ,  $t/\Delta t = 0,43$  i znajdź stosunek promieni gwiazd.

## ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

1. Ciężkie pierwiastki są produkowane w ostatnich stadiach ewolucyjnych masywnych gwiazd. Stąd kluczową informacją pozwalającą ocenić liczbę gwiazd w tych stadiach jest określenie ilości nowo powstających ciężkich pierwiastków. Można to zrobić, np. mierząc strumień kwantów gamma powstających w wyniku rozpadu krótko żyjących izotopów (krótko żyjące izotopy „świecą” niedługo i praktycznie emitowane promieniowanie określa tempo ich powstawania). Z początkiem 2006 roku doniesiono o pomiarze natężenia strumienia fotonów pochodzącego z rozpadu  $^{26}\text{Al}$  o okresie połowicznego zaniku  $7,2 \cdot 10^5$  lat. Natężenie to wyniosło  $\phi = 3,3 \cdot 10^{-4}$  fotonów na centymetr kwadratowy i sekundę. Fotony przychodzą z niewielkich, prawie punktowych źródeł nieregularnie rozłożonych w pasie o szerokości około 20 stopni i rozciągającym się na długości około 60 stopni wzdłuż płaszczyzny Galaktyki. Jak należało się spodziewać, środek pasa leży w kierunku na centrum Galaktyki. Okazało się dodatkowo, że fotony pochodzące ze skrajnych części pasa wykazują przesunięcie ku czerwieni i fioletowi wskazujące na udział źródeł promieniowania w ruchu wokół Galaktyki. Korzystając z tych danych, oszacuj ilość  $^{26}\text{Al}$  w Galaktyce.

Wskazówki: W celu oszacowania odległości, w jakiej znajdują się źródła promieniowania, skorzystaj z danych o przesunięciu dopplerowskim – z podanych własności można sądzić, że źródła promieniowania należą do pewnego pierścienia otaczającego jej centrum. Ponieważ chodzi jedynie o oszacowanie, do rachunków przyjmij, że wszystkie fotony pochodzą z jednego źródła leżącego w jakiejś wybranej przez Ciebie odległości z przedziału tych, które dopuszcza położenie tego pierścienia. Wyraźnie zapisz, jaka odległość została wybrana i dlaczego. Przyjmij, że odległość od centrum Galaktyki wynosi 28 tys. lat świetlnych.

2. Podaj, w jaki sposób zmieniają się w ciągu roku obserwowane współrzędne równikowe gwiazdy  $\alpha$  Leonis ( $\alpha$  Lwa). Przyjmij, że średnie współrzędne  $\alpha$  Lwa wynoszą:  $\alpha_{2000} = 10^h08^m00^s$ ,  $\delta_{2000} = +11^\circ58'00''$ , paralaksa  $\pi = 0''039$ .

3.\* Wiedząc, że odtwarzana sfera odpowiada wyglądowni nieba podczas jednej z tegorocznych nocy na Ziemi, korzystając z dostępnych materiałów, określ z możliwie największą dokładnością:

- datę odtwarzanej nocy,
- szerokość geograficzną miejsca obserwacji,
- porę nocy,
- widoczne na niebie obiekty z katalogu Messiera,
- współrzędne horyzontalne wskazanego obiektu.

\*Na niebie planetarium odtworzono wygląd sfery niebieskiej z pozycji obserwatora na równiku w dniu 10 grudnia 2006 roku, dwie godziny po zachodzie Słońca.

4. 10 listopada 2005 roku w obserwatorium SAAO, znajdującym się na płaskowyżu Karoo w RPA, nastąpiła oficjalna inauguracja SALT (Southern African Large Telescope) – teleskopu o największej obecnie powierzchni zbierającej światło, odpowiadającej powierzchni monolitycznego lustra o średnicy 10,5 metra. Polska uczestniczyła w jego budowie, ponosząc około 11% kosztów. W takim samym wymiarze polscy astronomowie mogą korzystać z czasu obserwacyjnego na tym teleskopie. W odróżnieniu od klasycznych teleskopów SALT, może poruszać się tylko wokół jednej osi: możliwy jest dowolny ruch w azymucie, natomiast stałe jest nachylenie osi teleskopu – wynosi ono 37 stopni względem pionu. W trakcie obserwacji zwierciadło teleskopu pozostaje nieruchome, a wybrane obiekty przesuwane się przed lustrem wraz z ruchem sfery niebieskiej mogą być obserwowane dzięki ruchowi urządzenia śledzącego, tzw. trackera, znajdującego się na powierzchni ogniskowej. Ponieważ lustro główne ma kształt sferyczny, tracker jest wyposażony w korektor aberracji sferycznej. Ruch trackera umożliwia obserwacje w pasie nieba o szerokości 12 stopni (6 stopni od osi zwierciadła).

Biorąc pod uwagę specyfikę budowy teleskopu SALT i jego ograniczenia, określ jego możliwości obserwacyjne, w szczególności:

- określ, jaki obszar nieba jest dostępny do obserwacji w zadanym momencie we współrzędnych horyzontalnych;
- określ zakres deklinacji obiektów, które SALT może obserwować;
- oszacuj, jaki procent sfery niebieskiej, dostępnej z obserwatorium SAAO, jest możliwy do obserwacji za pomocą teleskopu SALT.

Informacje dodatkowe:

- szerokość geograficzna obserwatorium SAAO:  $\varphi = -32^\circ$ ;
- pole boczne odcinka kuli (czaszy) wylicza się ze wzoru:  $P_b = 2\pi Rh$ , gdzie  $R$  jest promieniem kuli,  $h$  jest wysokością czaszy;
- przyjmij promień sfery niebieskiej równy 1.

5. Planetoida typu NEO obiega Słońce po elipsie w tej samej płaszczyźnie, w tym samym kierunku i z tym samym okresem co Ziemia. Drugie ognisko orbity planetoidy znajduje się na orbicie Ziemi. Wiedząc, że wczoraj planetoida była w opozycji i aphelium, oblicz, kiedy przetnie ona orbitę Ziemi i jaka będzie wówczas jej odległość od nas. W rozwiązaniu pominij oddziaływania perturbacyjne i przyjmij, że orbita Ziemi jest okręgiem.

6. Określ, kiedy sporządzono załączoną mapę aktualnego wówczas nieba. Należy podać pełne uzasadnienie odpowiedzi.

Wskazówka: Wskutek zjawiska precesji Punkt Barana przesuwa się po ekliptyce w kierunku przeciwnym niż ruch Słońca o kąt 50,3 sekundy rocznie.



### Końcowa klasyfikacja

#### Laureaci

I miejsce: Krystyna Macioszek, V LO im. K. Kieślowskiego w Zielonej Górze

II miejsce: Karolina Sołtys, I LO im. Stanisława Staszica w Lublinie

III miejsce ex aequo:

Piotr Czarnik, II LO im. płk. Leopolda Lisa Kuli w Rzeszowie

Krzysztof Zieleniewski, II LO im. Jana Śniadeckiego w Kielcach

IV miejsce ex aequo:

Paweł Kołacz, IX LO im. Cypriana. K. Norwida w Częstochowie

Tomasz Smoleński, VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu

#### Finaliści

V miejsce: Krzysztof Niemkiewicz, VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu

VI miejsce: Rafał Szepietowski, III LO im. Marynarki Wojennej w Gdyni

VII miejsce: Przemysław Zych, LO im. Bolesława Prusa w Skierniewicach

VIII miejsce: Paweł Swaczyna, Salezjański ZSP „Don Bosko” w Świętochłowicach

IX miejsce: Marcin Abram, ZSO nr 10 im. Edwarda Dembowskiego w Gliwicach

X miejsce: Paweł Sierszeń, I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim

XI miejsce ex aequo:

Juliusz Stasiewicz, I LO im. Adama Mickiewicza Białymstoku

Tomasz Szalast, I LO w Radzynie Podlaskim

Karol Wędołowski, I LO im. Ziemi Kujawskiej we Włocławku

#### oraz

Marcin Chwała, LO im. Stefana Żeromskiego w Strzegomiu

Michał Kobielarz, IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu

Filip Misiewicz, I LO im. Stanisława Staszica w Lublinie

Mariusz Niedźwiecki, ZSO nr 1 im. Adama Mickiewicza w Prudniku

Julia Romanowska, I LO im. Juliusza Słowackiego w Chorzowie