O cyklach i klikach

Tomasz WARSZAWSKI *

Jest to skrót pracy nagrodzonej srebrnym medalem w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 2005 roku.

Rozważmy n osób, które spotkały się na pewnym przyjęciu. Niektóre z nich są znajomymi. Możemy pytać, na przykład, ilu gości można posadzić przy okrągłym stole tak, by każdy siedział obok swoich znajomych? Albo też czy istnieje na przyjęciu liczna grupa takich osób, że każde dwie z tej grupy się znają? Może to przecież utrudnić zawieranie nowych znajomości. Takie zagadnienia wygodnie jest badać w języku teorii grafów.

Utwórzmy graf, którego wierzchołki będą reprezentować gości. Dwa wierzchołki łączymy krawędzią, jeśli odpowiednie osoby znają się nawzajem. Pierwsze z powyższych pytań równoważne jest szukaniu cykli prostych w tym grafie, drugie badaniu klik. Cyklem (prostym) w grafie nazywamy taki ciąg $(x_1, \ldots, x_k)$ $(k \geqslant 3)$ złożony z różnych wierzchołków grafu, że x_i jest połączony krawędzią z $x_{(i+1) \bmod k}$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Szczególnym przypadkiem cyklu jest cykl Hamiltona, złożony z wszystkich wierzchołków grafu. Wybierzmy pewien podzbiór wierzchołków i te krawędzie oryginalnego grafu, które końce mają tylko w wybranych wierzchołkach. Otrzymaliśmy pewien podgraf grafu wyjściowego. Jeżeli jego dowolne dwa wierzchołki są połączone krawędzią, to taki podgraf nazywamy kliką. W pracy zająłem się szukaniem warunków, przy których w grafie znajomości pojawiają się cykle i kliki.

Pierwszy warunek jest związany z następującym twierdzeniem Turána:

Jeżeli w grafie znajomości o n wierzchołkach każda klika ma co najwyżej m wierzchołków, to liczba E znajomości (krawędzi) w tym grafie spełnia nierówność

$$E \leqslant \frac{m-1}{2m} n^2.$$

Nierówność tę można stosunkowo łatwo udowodnić indukcyjnie, a wynika z niej następujący warunek dostateczny na pojawienie się w grafie znajomości kliki o $(m+1)$ wierzchołkach: wystarczy, by krawędzi w tym grafie było więcej niż $\frac{(m-1)n^2}{2m}$.

Przejdźmy teraz do cykli w grafach znajomości. Warunek istnienia cyklu Hamiltona daje następujące twierdzenie Orego:

Danych jest n osób, przy czym dla każdej pary nieznających się osób suma liczby znajomych obu osób wynosi co najmniej n. Wówczas można wszystkie osoby ustawić w cykl Hamiltona.

Kolejne twierdzenia dotyczą pojawienia się w grafie cyklu, o którym nie wiemy, jaką dokładnie ma długość.

Załóżmy, że w grupie $n \geqslant 5$ osób wśród dowolnych trzech pewne dwie znają się. Wówczas spośród tych osób można wybrać nie mniej niż $n/2$ osób i posadzić je przy okrągłym stole tak, aby każdy siedział między dwoma swoimi znajomymi.

Załóżmy, że w grupie $n \geqslant 3$ osób jest co najmniej n znajomości. Wówczas w tej grupie znajdzie się pewien cykl.

Nierozstrzygnięte pozostaje następujące zagadnienie: jaka jest najmniejsza liczba krawędzi, jaką trzeba narysować w grafie o n wierzchołkach, by mieć pewność, że znajdziemy w nim 4-wierzchołkowy cykl? Wiadomo, że zawsze wystarczy $\lfloor \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3}) \rfloor + 1$, ale dla dużych n nie jest to optymalne oszacowanie.

Kolejne warunki są związane z tzw. liczbami Ramseya. Rozważmy graf pełny, tj. taki, w którym każde dwa wierzchołki są połączone dokładnie jedną krawędzią. Wyobraźmy sobie, że każdą krawędź w grafie możemy pomalować na niebiesko lub czerwono. Ustalmy ponadto liczby naturalne k i l. Pytanie więc jest takie: jakie jest najmniejsze takie n, że przy dowolnym pokolorowaniu krawędzi grafu pełnego o n wierzchołkach pojawi się niebieska klika o k wierzchołkach lub czerwona o l wierzchołkach? Takie n oznaczamy przez $R(k, l)$. Zauważmy, że jeżeli na przyjęciu jest co najmniej $R(k, l)$ gości, to możemy znaleźć grupę złożoną z k osób, w której każde dwie znają się nawzajem lub istnieje grupa

Rozwiązanie zadania M 1137.
Wybieramy dowolną osobę. Następnie dołączamy do niej jedną osobę, która jej nie zna. Do tak uzyskanej pary dołączamy trzecią osobę, która nie zna żadnej z tych dwóch osób. Dalej dołączamy do tej trójki czwartą osobę, która nie zna nikogo z tej trójki, itd.

Wykonując to postępowanie n-krotnie uzyskujemy grupę n osób, w której żadna nie zna żadnej innej osoby z tej grupy. Ponieważ wśród dowolnych dziesięciu osób istnieje trójka znajomych, więc $n \leqslant 8$. Innymi słowy, opisane postępowanie musi zakończyć się po co najwyżej ośmiu krokach. Zatem każda z osób nienależących do wybranej grupy zna przynajmniej jedną osobę z wybranej grupy.

Jeśli $n < 8$, to uzupełniamy wybraną grupę dowolnie do ośmiu osób uzyskując osiem osób spełniających warunki zadania.

*Student I roku matematyki na Uniwersytecie Jagiellońskim.

złożona z l osób, w której żadne dwie nie są znajomymi. Analogicznie, mając do dyspozycji a kolorów, definiujemy dla liczb naturalnych $k_1, \ldots, k_a$ liczby Ramseya $R(k_1, \ldots, k_a)$. W przypadku gdy $k_1 = k_2 = \ldots = k_a = 3$, $R_a = R(k_1, \ldots, k_a)$ jest najmniejszą taką liczbą, że przy dowolnym pomalowaniu krawędzi grafu pełnego o R_a wierzchołkach a kolorami zawsze dostaniemy co najmniej jeden trójkąt o bokach w tym samym kolorze. Korzystając z zasady szufladkowej i indukcji, dowodzi się, że $R_a \leqslant x_a$, gdzie $x_1 = 3$ i $x_a = a \cdot x_{a-1} - a + 2$ dla $a \geqslant 2$.

Powróćmy jednak do liczb $R(k, l)$. Mamy oczywiście $R(k, 2) = k$ oraz $R(k, l) = R(l, k)$. Fundamentalną nierównością, która dotyczy liczb Ramseya jest nierówność:

$$R(k, l) \leqslant R(k, l-1) + R(k-1, l).$$

Z niej i z warunku początkowego łatwo wyprowadzić, że

$$R(k, l) \leqslant \binom{k+l-2}{k-1}.$$

To jednak nie wszystko. W swojej pracy pokazałem, że gdy mamy dane oszacowania $R(m, n-1) \leqslant C$ oraz $R(m-1, n) \leqslant D$, gdzie C i D są parzyste, to oszacowanie $R(m, n) \leqslant C + D$ możemy poprawić na

$$R(m, n) \leqslant C + D - 1.$$

Wynikające z tego faktu oszacowania niewielkich liczb Ramseya pokazuje tabelka obok.

Liczba Ramseya	Oszacowanie górne
$R(m,n)$	$\binom{m+n-2}{m-1}$
$R(3,3)$	6
$R(3,4)$	9
$R(3,5)$	14
$R(3,6)$	19
$R(4,4)$	18
$R(4,5)$	31
$R(4,6)$	50
$R(5,5)$	62
$R(5,6)$	111
$R(6,6)$	222

Więcej informacji o liczbach Ramseya i ich lepsze oszacowania można znaleźć na stronie `http://mathworld.wolfram.com/RamseyNumber.html`.

Następujący problem wydał mi się bardzo ciekawy. Jest on analogiczny do problemu liczb Ramseya, jednak pojawia się w nim dodatkowe założenie o nieparzystości cykli. Załóżmy znów, że w danym grafie pełnym o n wierzchołkach każdą krawędź pokolorowano jednym z a kolorów. Jakie jest najmniejsze $n = n(a)$, przy którym po dowolnym takim pokolorowaniu pojawi się nieparzysty (tzn. o nieparzystej liczbie wierzchołków) cykl o wszystkich krawędziach w jednym kolorze? Okazuje się, że ta „nieparzystość" umożliwia podanie konkretnej odpowiedzi (w przypadku liczb Ramseya znane są w większości tylko oszacowania):

$$n(a) = 2^a + 1.$$

W swojej pracy zajmowałem się także badaniem istnienia cykli w grafach turniejowych, czyli grafach pełnych, które ponadto są skierowane. Oznacza to, że dla każdej krawędzi określono, który wierzchołek jest jej początkiem, a który końcem. Graficznie oznaczamy to za pomocą strzałki. Graf turniejowy można interpretować jako zapis wyników turnieju, w którym każdy zagrał z każdym dokładnie raz i nie było remisów. Strzałki na krawędziach wskazują zwycięzców każdej rozgrywki. Od cykli w grafie skierowanym żądamy dodatkowo, aby początkiem krawędzi łączącej x_i z $x_{(i+1) \bmod k}$ było x_i. Na zakończenie chciałbym podać warunek na istnienie cyklu Hamiltona w grafie turniejowym. Zanim jednak o nim będzie mowa, spójrzmy na poniższy łatwy lemat:

Dla każdego grafu turniejowego zachodzi co najmniej jeden z przypadków:

a) można wszystkich zawodników podzielić na niepuste rozłączne podzbiory A i B takie, że każdy zawodnik z A wygrał z każdym zawodnikiem z B,

b) istnieje w tym grafie 3-cykl.

Używając tego lematu, dowodzi się następującego twierdzenia:

Dla każdego grafu turniejowego następujące warunki są równoważne:

a) nie istnieje podział wszystkich zawodników na niepuste rozłączne podzbiory A i B takie, że każdy zawodnik z A wygrał z każdym zawodnikiem z B,

b) wszystkich zawodników można ustawić w cykl Hamiltona.

Rozwiązanie zadania M 1135.
Wśród dowolnych 26 kolejnych liczb naturalnych jest dokładnie 13 liczb parzystych i 13 nieparzystych. Wśród dziesięciu wybranych liczb jest nieparzysta liczba liczb nieparzystych. Zatem wśród pozostałych szesnastu liczb jest parzysta liczba liczb nieparzystych. Stąd wynika, że suma pozostałych szesnastu liczb jest parzysta, a więc jest liczbą złożoną.