Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2006

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
507 ($WT = 1{,}60$) i **508** ($WT = 2{,}18$)
z numeru 10/2005

Paweł Najman	– Jaworzno	43,49
Janusz Olszewski	– Suwałki	39,79
Adam Dzedzej	– Gdańsk	34,96

Zadania z matematyki nr 523, 524

Redaguje Marcin E. KUCZMA

523. Wewnątrz sześciokąta wypukłego $ABCDEF$ znajduje się punkt O, z którego każdy bok sześciokąta jest widoczny pod kątem $60°$, a ponadto

$$|OA| > |OC| > |OE| \quad \text{oraz} \quad |OB| > |OD| > |OF|.$$

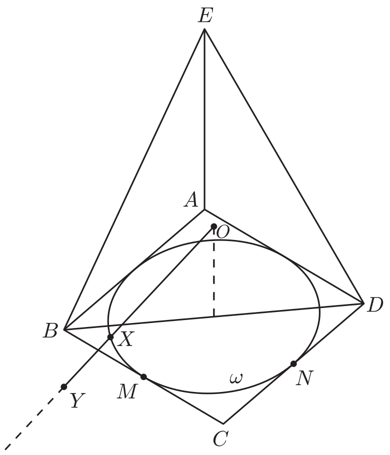
Udowodnić, że $|AB| + |CD| + |EF| < |BC| + |DE| + |FA|$.

524. Ciąg liczb dodatnich (x_n) spełnia zależność rekurencyjną

$$27(1-2x_n)x_{n-1}x_{n+1} \geqslant 1 \quad \text{dla} \quad n = 1,2,3,\ldots\,.$$

Wykazać jego zbieżność i obliczyć granicę.

Zadanie 524 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.



Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2006

Przypominamy treść zadań:

515. W ścianę $ABCD$ sześcianu o krawędzi 1 wpisany jest okrąg ω. Wierzchołek E jest końcem krawędzi AE prostopadłej do AB i AD. Okrąg Ω jest opisany na trójkącie BDE. Obliczyć długość najkrótszego odcinka łączącego punkt okręgu ω z punktem okręgu Ω.

516. Rozważamy operację, która uporządkowanej parze dodatnich liczb całkowitych (a,b) przyporządkowuje parę $(a',b') = \begin{cases} (2a,\ b-a) & \text{gdy } a < b, \\ (a-b,\ 2b) & \text{gdy } a \geqslant b. \end{cases}$ Startujemy od zadanej pary (a_0,b_0) liczb całkowitych dodatnich i powtarzamy algorytm. Przerywamy, gdy pojawi się para liczb, z których jedna jest zerem. Scharakteryzować te pary początkowe (a_0,b_0), dla których algorytm zatrzyma się w skończonym czasie.

515. Okrąg Ω jest podzbiorem sfery opisanej na sześcianie; okrąg ω jest podzbiorem sfery wpisanej w szkielet sześcianu (stycznej do wszystkich krawędzi). Te dwie sfery mają wspólny środek O, a ich promienie są równe odpowiednio $R = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Każdy odcinek o jednym końcu na jednej sferze, a drugim na drugiej, ma długość niemniejszą niż $R - r$; a jeśli leży na półprostej o początku O, wówczas ma dokładnie długość $R - r$.

Wykażemy, że taka sytuacja ma miejsce dla pewnego odcinka o końcach na okręgach Ω i ω. Okrąg ω jest styczny do odcinków CB i CD w ich środkach M i N. Ponieważ O jest środkiem odcinka CE, płaszczyzna MNO jest równoległa do BDE; w szczególności proste OM i ON są równoległe do płaszczyzny BDE.

Niech X będzie zmiennym punktem, obiegającym okrąg ω (rysunek). Gdy X leży na dłuższym łuku MN okręgu ω, półprosta $OX^{\rightarrow}$ przecina płaszczyznę BDE. Punkt przecięcia może leżeć wewnątrz okręgu Ω (np. gdy $X \in \omega$ jest punktem najbliższym punktu A), jak i na zewnątrz okręgu Ω (np. gdy X zbliża się do któregokolwiek końca łuku MN i półprosta $OX^{\rightarrow}$ tworzy z płaszczyzną BDE kąt bliski zeru).

Zatem przy pewnym położeniu punktu $X \in \omega$ półprosta $OX^{\rightarrow}$ przetnie okrąg Ω w pewnym punkcie Y. W myśl konkluzji pierwszego akapitu, odcinek XY ma wówczas długość $R - r = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$, i jest to minimalna długość, jaką może mieć odcinek o końcach na okręgach Ω i ω.

516. Suma $a + b$ jest niezmiennikiem badanej operacji. Jeśli więc $a_0 + b_0 = n$, to dalej już stale $b = n - a$, co pozwala wyeliminować zmienną b:

$$a' = \begin{cases} 2a & \text{gdy } a < n/2, \\ 2a - n & \text{gdy } a \geqslant n/2. \end{cases}$$

To znaczy, że a' jest resztą z dzielenia $2a$ przez n ($0 \leqslant a' \leqslant n-1$); drugi element pary, czyli liczba $b' = n - a'$, nigdy nie będzie zerem.

Pytamy więc, kiedy iterowane podwajanie zmiennej a doprowadzi do zera (mod n). Stanie się tak wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnych liczb naturalnych k, q zachodzi równość $2^k a_0 = qn$. Równoważnie: gdy iloraz

$$\frac{a_0}{a_0 + b_0}$$

jest liczbą dwójkowo-wymierną (tzn. liczbą postaci $2^{-k}q$). Jeszcze inaczej: gdy każdy nieparzysty dzielnik pierwszy sumy $a_0 + b_0$ jest jednocześnie (w co najmniej tej samej potędze) dzielnikiem obu składników tej sumy. Jest to żądana charakteryzacja.

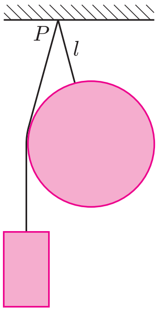
Klub 44

Zadania z fizyki nr 420, 421

Redaguje Jerzy B. BROJAN

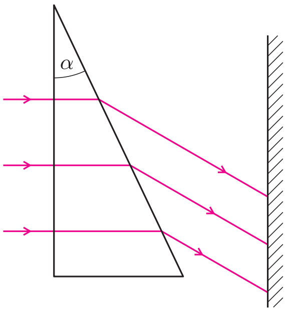
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2006

420. W tym samym punkcie P zawieszono na nici o długości $l = 3$ cm kulę o promieniu $r = 5$ cm i masie $m_1 = 300$ g oraz na odpowiednio długiej nici (zob. rys. 1) ciężarek o masie $m_2 = 200$ g. Tarcie między kulą a tą nicią nie występuje. Obliczyć siłę napinającą nić, na której wisi kula.



Rys. 1

421. Ekran jest równomiernie oświetlony światłem padającym na niego prostopadle. Jak zmieni się natężenie jego oświetlenia, jeśli na drodze promieni ustawimy pryzmat (rys. 2) o kącie łamiącym α ze szkła o współczynniku załamania n? Ściana, na którą pada światło, jest równoległa do ekranu. Pominąć odbicie światła od ścian pryzmatu.



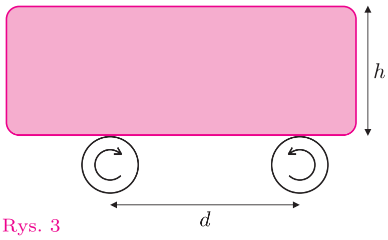
Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/2006

Przypominamy treść zadań:

412. Proces fermentacji win musujących trwa jeszcze – jak wiadomo – po rozlaniu ich do butelek i zakorkowaniu, przy czym powstaje mętny osad, który usuwa się na ostatnim etapie produkcji wina. Dokonuje się tego następująco: butelka jest wtedy przechowywana szyjką do dołu, zatem osad skupia się w szyjce. Szyjkę tę się zamraża, tak że przy korku powstaje warstwa lodu, odwraca się butelkę do pozycji normalnej, wyciąga korek wraz z lodem i zawartym w nim osadem i korkuje butelkę ponownie. Wino jest wtedy już nasycone dwutlenkiem węgla pod ciśnieniem. Dlaczego więc przy otwieraniu butelki wino się nie pieni i nie „ucieka" z butelki, tak jak podczas zwykłego otwarcia?

413. Na dwóch walcach obracających się w przeciwne strony położono jednorodny klocek (rys. 3) tak, że jego środek był początkowo nieco bliżej jednego z walców. Odległość osi walców jest równa d, wysokość klocka – h, a współczynnik tarcia walców o klocek – f. Podać warunki, przy których ruch klocka jest harmoniczny i obliczyć okres drgań.



Rys. 3

412. Mamy tu do czynienia ze stanem równowagi nietrwałej, podobnym do wody przegrzanej albo przechłodzonej. Dowodem na to jest fakt, że lekkie stuknięcie w otwartą butelkę powoduje „katastrofę" – gwałtowne spienienie się wina. Podobnie można wywołać gwałtowne wrzenie przegrzanej wody.

413. Oznaczmy masę klocka przez m, a siły nacisku klocka na walce przez N_1 i N_2. Siły tarcia są dane wzorami

$$T_1 = fN_1, \qquad T_2 = fN_2,$$

a przy założeniu małej amplitudy drgań są one skierowane stale do środka (równoważnie można przyjąć, że prędkość obrotu walców jest odpowiednio duża). Oprócz oczywistego warunku

$$N_1 + N_2 = mg$$

siły muszą też spełniać równanie wynikające z braku obrotu klocka, tzn. suma ich momentów względem środka masy jest równa zeru

$$N_1\left(\frac{d}{2} - x\right) - N_2\left(\frac{d}{2} + x\right) = (T_1 - T_2)\,\frac{h}{2},$$

gdzie x jest przesunięciem klocka względem położenia równowagi. W wyniku przekształceń otrzymujemy wzór na wypadkową siłę działającą na klocek

$$F_{wyp} = T_1 - T_2 = \frac{2xmgf}{d - fh}.$$

Siła ta jest – jak widać – proporcjonalna do wychylenia, a jeśli spełniony jest warunek $d > fh$, to jest skierowana w stronę położenia równowagi i wtedy rzeczywiście ruch klocka jest harmoniczny. Okres T jest równy $2\pi\sqrt{m/k}$, gdzie k jest współczynnikiem przy x w powyższym wzorze, tzn.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d - fh}{2gf}}.$$

Jeśli $d < fh$, to klocek postawiony poza położeniem równowagi przestanie się opierać na jednym z walców i przewróci się.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
408 ($WT = 1{,}26$) i **409** ($WT = 2{,}99$)
z numeru 12/2005

Mateusz Łącki	– Kraków	40,63
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	29,70
Konrad Kapcia	– Częstochowa	28,96
Tomasz Tkocz	– Rybnik	23,14
Jacek Konieczny	– Poznań	15,22