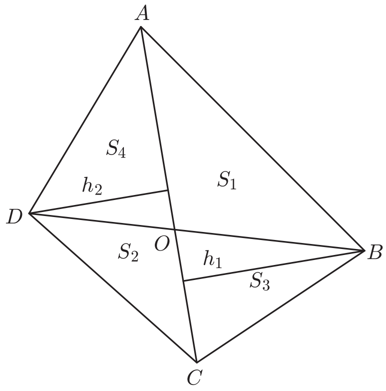
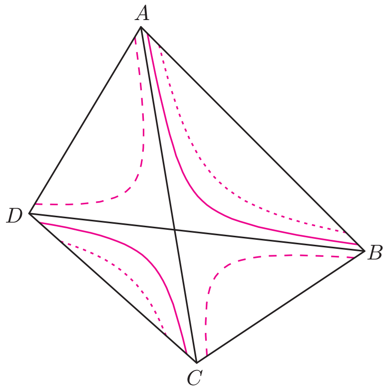




Hiperbole w czworokącie

W *Delcie* 4/2006 A. Wrzesień postawił przed Czytelnikami pytanie, w jakich czworokątach wypukłych spełniona jest równość

$$(*) \qquad \sqrt{S_1 \cdot S_2} = \frac{S_3 + S_4}{2},$$

gdzie S_1, S_2, S_3, S_4 oznaczają odpowiednio pola trójkątów ΔABO, ΔCDO, ΔBCO, ΔDAO, a punkt O jest punktem przecięcia się przekątnych.

Na pewno Czytelnicy nie mieli problemów ze stwierdzeniem, że jeżeli w czworokącie zachodzi $(*)$, to musi on być trapezem. Wynika to z prostej obserwacji, że w dowolnym czworokącie zachodzi

$$(**) \qquad S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4.$$

Rzeczywiście, każdy z iloczynów jest równy $\frac{1}{4}h_1h_2 \cdot |OA| \cdot |OC|$. Zatem $(*)$ jest równoważna równości $\sqrt{S_3 \cdot S_4} = \frac{S_3+S_4}{2}$, która zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $S_3 = S_4$. A to już pozwala na stwierdzenie, że $AB \parallel CD$.

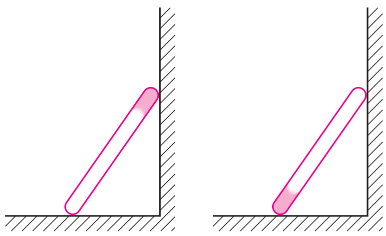
Zastanówmy się teraz, dla jakich innych punktów O z wnętrza czworokąta wypukłego i wyznaczonych przez niego trójkątów spełniona jest równość $(**)$. Szybko zauważamy, że może to być dowolny inny punkt należący do którejś z przekątnych. A jak układają się punkty, dla których $S_1 \cdot S_2 - S_3 \cdot S_4 = c$ dla pewnej niezerowej stałej c? Okazuje się, że dostaniemy albo zbiór pusty, albo fragment hiperboli, której asymptoty zawierają przekątne naszego czworokąta. A co będzie, jeśli dopuścimy także punkty O leżące poza czworokątem? Czy otrzymane krzywe mają jakieś ciekawe geometryczne własności powiązane z wyjściowym czworokątem? A co z wyrażeniem $(S_1 + S_2) - (S_3 + S_4) = c$? Zachęcamy Czytelników do własnych poszukiwań!

Marcin HAUZER

Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

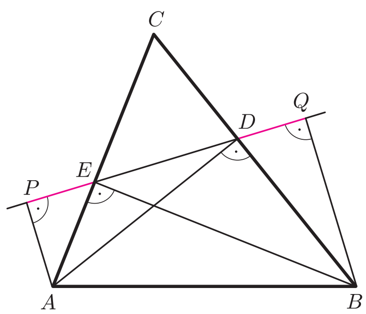
F 669. Pręt z jednej strony zakończony jest bardzo śliską powierzchnią mogącą poruszać się praktycznie bez tarcia, z drugiej powierzchnią szorstką, o dużym współczynniku tarcia statycznego. Opieramy go o ścianę raz częścią szorstką do góry, raz w dół (rys. 1). W której pozycji może on znajdować się w stanie równowagi i dlaczego?
Rozwiązanie na str. 16


Rys. 1

F 670. Drabina składa się z dwóch jednakowych części połączonych przegubem działającym bez tarcia. Na jej lewą część, do 3/4 całkowitej wysokości drabiny, wchodzi człowiek. Z której strony lepiej podeprzeć drabinę zamocowanym klockiem, aby zapobiec „rozjechaniu się” drabiny z człowiekiem?
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Waldemar POMPE

M 1135. Danych jest 26 kolejnych liczb naturalnych. Okazało się, że suma pewnych dziesięciu z nich jest liczbą pierwszą. Wykazać, że suma pozostałych szesnastu liczb jest liczbą złożoną.
Rozwiązanie na str. 7



Rys. 2

M 1136. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi punktów A i B, odpowiednio, na proste BC i CA (rys. 2). Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi, odpowiednio, punktów A i B na prostą DE. Dowieść, że $PE = DQ$.
Rozwiązanie na str. 2

M 1137. Na przyjęciu spotkało się $n > 10$ osób. Okazało się, że wśród dowolnych dziesięciu z nich istnieją trzy, z których każda zna dwie z pozostałych. Wykazać, że spośród wszystkich osób na przyjęciu można wyłonić osiem tak, aby każda z pozostałych znała przynajmniej jedną osobę z wybranej ósemki.
Rozwiązanie na str. 6