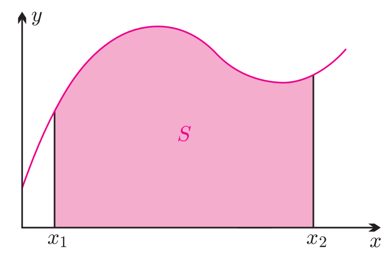
Całkowanie numeryczne

Jerzy GINTER [*]



Rys. 1

Funkcją pierwotną funkcji f jest każda funkcja, której pochodną jest f.

1. Wstęp

Jak wiadomo, wartość całki oznaczonej funkcji dodatniej $y = f(x)$ jest równa wartości pola zawartego między wykresem funkcji a osią x (rys. 1). Obliczanie tego pola może napotkać trudności co najmniej w dwóch przypadkach:

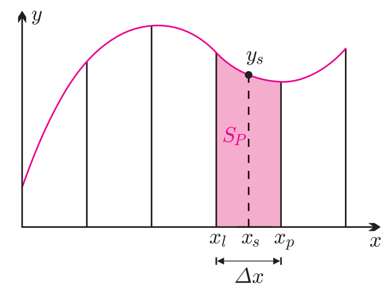
1. jeżeli Czytelnik – na przykład uczeń gimnazjum – nie zna rachunku całkowego;

2. jeżeli funkcja pierwotna F funkcji f nie wyraża się przez funkcje elementarne.

W takich przypadkach może okazać się przydatna umiejętność przybliżonego numerycznego całkowania.

Omówimy tu tylko trzy najprostsze metody takich obliczeń. W każdej z nich interesujące nas pole przybliża się szeregiem pionowych pasków o jednakowej szerokości Δx; można przy tym oczekiwać, że dla „przyzwoitych” funkcji dokładność uzyskanego wyniku będzie rosła ze zwiększaniem gęstości podziału, czyli zmniejszaniem wielkości Δx. Omawiane metody różnią się sposobem przybliżonego obliczania pola S paska. Umówmy się od razu co do numeracji: pole S_n zawarte jest pomiędzy x_{n-1} a x_n.

Jeżeli interesuje nas całka oznaczona, należy po prostu obliczyć sumę pól S_n dla interesującego nas zakresu x. Jeżeli chcemy uzyskać funkcję pierwotną F, trzeba obliczać kolejno sumy pól od lewego brzegu rozważanego przedziału x_0 do wartości $x_n = x_0 + n\Delta x$. Jest to równoważne algorytmowi $F(x_n) = F(x_{n-1}) + S_n$.

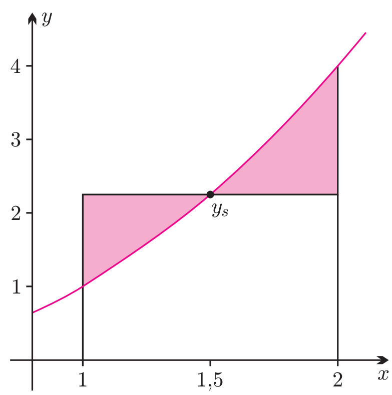


Rys. 2

2. Metoda prostokątów

Rozważmy fragment omawianego pola, którego podstawę stanowi odcinek zawarty między x_l i $x_p = x_l + \Delta x$ (rys. 2). Metoda prostokątów polega na przybliżeniu pola S wyróżnionego przez nas fragmentu przez pole prostokąta S_P o wysokości równej wartości funkcji w środku przedziału, czyli w punkcie o współrzędnej $x_s = x_l + \frac{\Delta x}{2} = \frac{x_l + x_p}{2}$. Oznaczmy wartość tej funkcji symbolem $y_s = f(x_l + \frac{\Delta x}{2}) = f(\frac{x_l + x_p}{2})$. Pole prostokąta jest więc równe

$$S_P = y_s \Delta x = f\left(\frac{x_l + x_p}{2}\right)\Delta x.$$



Rys. 3

Przykład. Oszacujmy dokładność tego przybliżenia na prostym przykładzie. Rozważmy funkcję $f(x) = x^2$ na przedziale $\langle 1, 2\rangle$ (rys. 3). Dokładna wartość szacowanego pola dana jest całką

$$S = \int\limits_1^2 x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3} \approx 2{,}333.$$

$h(x)|_a^b$ oznacza $h(b) - h(a)$.

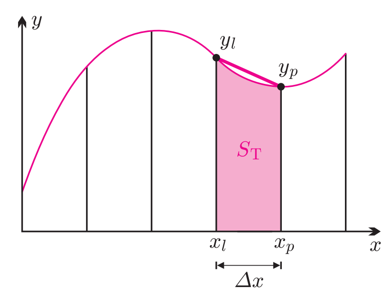
W metodzie prostokątów przybliżona wartość tego pola to

$$S_P = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{9}{4} = 2{,}25.$$

Metoda prostokątów daje więc w tym przypadku wynik **za mały**. Różnica w porównaniu z wynikiem dokładnym jest równa

$$S - S_P = \frac{7}{3} - \frac{9}{4} = \frac{28-27}{12} = \frac{1}{12}.$$

Błąd względny jest więc równy $\frac{1}{12} : \frac{7}{3} = \frac{1}{28} \approx 0{,}036 = 3{,}6\%$.



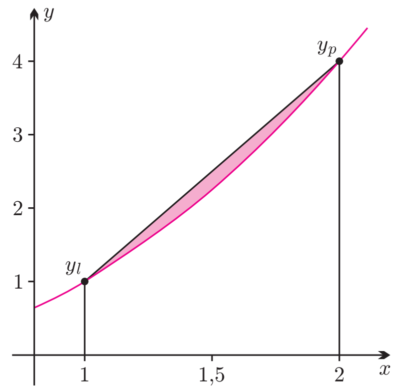
Rys. 4

3. Metoda trapezów

Metoda polega na przybliżeniu interesującego nas pola S polem trapezu S_T o lewej podstawie $y_l = f(x_l)$ i prawej podstawie $y_p = f(x_p)$ (rys. 4). Wartość tego pola jest równa

$$S_T = \frac{y_l + y_p}{2}\Delta x = \frac{f(x_l) + f(x_p)}{2}\Delta x.$$

*Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego



Rys. 5

Przykład. Oszacujmy dokładność metody trapezów na tym samym przykładzie co poprzednio (rys. 5). Wartość szacowanego pola w metodzie trapezów jest równa

$$S_T = \frac{1^2+2^2}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

Otrzymaliśmy więc wynik **za duży** – o pole figury zakreskowanej na rysunku 5. Błąd wyniku jest równy

$$S_T - S = \frac{5}{2} - \frac{7}{3} = \frac{15-14}{6} = \frac{1}{6}.$$

Błąd względny jest więc równy $\frac{1}{6} : \frac{7}{3} = \frac{1}{14} \approx 0,071 = 7{,}1\%$.

Widzimy, że metoda prostokątów jest w tym przypadku dokładniejsza niż metoda trapezów (co może na pierwszy rzut oka wydawać się dziwne, bo linia łamana wydaje się lepiej przybliżać krzywą $f(x)$ niż „schodki"). W rozpatrywanym przykładzie błąd pierwszej z tych metod jest dwa razy mniejszy niż drugiej.

4. Metoda Simpsona

Podsumujmy: dla funkcji wypukłej, jaką jest $f(x) = x^2$ (tak!, w matematyce funkcjami wypukłymi nazywa się te, których wykresy leżą w całości pod ich dowolnymi siecznymi), metoda **prostokątów** dała wynik za mały z pewnym błędem. Metoda **trapezów** dała wynik za duży – z błędem dwa razy większym. Przybliżmy więc to pole S polem S_S, który jest średnią ważoną:

$$S_S = \frac{2}{3}S_P + \frac{1}{3}S_T = \frac{2}{3}y_s\Delta x + \frac{1}{3}\frac{y_l+y_p}{2}\Delta x = \frac{y_l+y_p+4y_s}{6}\Delta x = \\ = \frac{f(x_l)+f(x_p)+4f(x_s)}{6}\Delta x. \qquad (1)$$

Przedstawiony tu sposób przybliżania nazywamy metodą Simpsona.

Dla funkcji $f(x) = x^2$ z poprzednich przykładów metoda Simpsona daje wynik **dokładny**:

$$S_S = \frac{1+4+4\cdot\frac{9}{4}}{6}\cdot 1 = \frac{7}{3}.$$

Wrócimy do tej sprawy jeszcze w dalszej części tekstu.

5. Całkowanie funkcji $\frac{1}{x^2}$

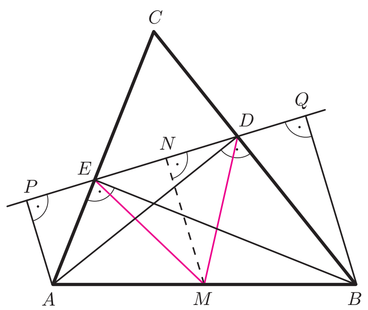
Zastosujmy omówione metody do całki $f(x) = \frac{1}{x^2}$, która pojawia się przy obliczaniu pracy w polu grawitacyjnym czy elektrostatycznym. Wybierzemy przedział zmiennej x zawarty pomiędzy 1 a 2 i podział $\Delta x = 0{,}2$. Uzyskane wyniki przedstawia wygenerowana w *Excelu* tabela. Szczegóły Czytelnik znajdzie w programie *Kulomb* na stronie internetowej *Delty*; tu przytaczamy tylko wyniki ostateczne. Trzecia kolumna, oznaczona $F_P(x_n)$, przedstawia wartości funkcji pierwotnej F obliczone metodą prostokątów. Czwarta, czyli $F_T(x_n)$ – obliczoną metodą trapezów. Piąta, $F_S(x_n)$ – metodą Simpsona. A szósta – wyniki ścisłe, opisane wzorem

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{t}\Big|_1^x = 1 - \frac{1}{x}.$$

n	x_n	$F_P(x_n)$	$F_T(x_n)$	$F_S(x_n)$	$1-\frac{1}{x}$
0	1	0	0	0	0
1	1,2	0,165289	0,169444	0,166674	0,166667
2	1,4	0,283632	0,289909	0,285725	0,285714
3	1,6	0,372521	0,379992	0,375012	0,375
4	1,8	0,441725	0,449919	0,444457	0,444444
5	2	0,497127	0,505783	0,500012	0,5

Widać, że – podobnie jak w poprzednim przykładzie – metoda prostokątów daje wynik za mały. W ostatnim wierszu błąd wynosi 0,6%. Metoda trapezów daje wynik za duży – analogicznie o około 1,2%. Natomiast błąd metody Simpsona wynosi około 0,0024%; dokładność tej metody jest więc w tym przykładzie przeszło 200 razy większa niż metody prostokątów.

Rozwiązanie zadania M 1136.
Niech M i N będą odpowiednio środkami odcinków AB i PQ. Prosta MN jest równoległa do podstaw trapezu prostokątnego $ABQP$, a więc jest prostopadła do prostej PQ.



Ponieważ $\sphericalangle ADB = \sphericalangle AEB = 90°$, więc punkt M jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $ABDE$. Stąd trójkąt DME jest równoramienny, czyli $DN = NE$. Równość ta wraz z zależnością $QN = NP$ daje tezę.

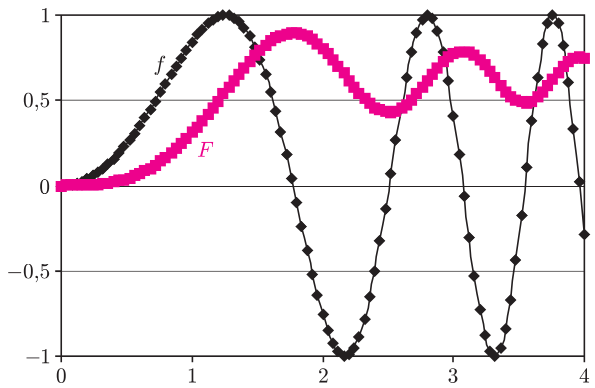
6. Całkowanie funkcji $\sin(x^2)$

Przykład poprzedni miał znaczenie dydaktyczne. Metody numeryczne są przydatne przede wszystkim wtedy, kiedy funkcja pierwotna interesującej nas funkcji f, czyli funkcja F, nie wyraża się przez funkcje elementarne. Możemy wtedy do obliczania wartości $F(x)$ posłużyć się algorytmem wykorzystującym którąś z wyżej omówionych metod. Na przykład, korzystając z metody Simpsona, możemy napisać

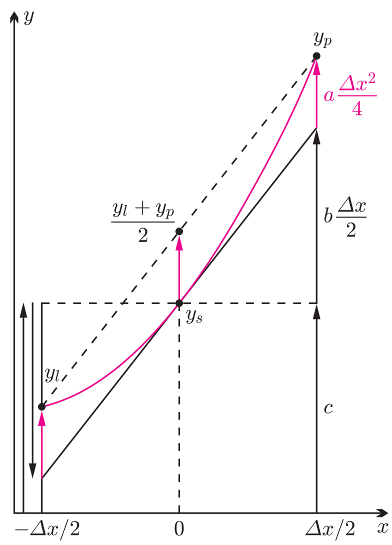
$$F(x_n) \approx F(x_{n-1}) + \frac{\Delta x}{6}\left(f(x_{n-1}) + f(x_n) + 4f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right),$$

gdzie $x_n = n\Delta x$.

Jako przykład program *sin(x2)* przedstawia wynik takiego całkowania dla funkcji $\sin(x^2)$ (rys. 6).



Rys. 6



Rys. 7

7. Jeszcze o metodzie Simpsona

Metoda Simpsona polega na przybliżeniu całkowanej krzywej odcinkami parabol, przechodzącymi przez trójki punktów, których współrzędne w skrócie nazywaliśmy (x_l, y_l), (x_s, y_s), (x_p, y_p) (rys. 7). Wybierzmy na chwilę początek układu współrzędnych w środku przedziału (x_l, x_p) i przybliżmy całkowaną funkcję parabolą $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wynikają stąd wzory:

$$y_s = f(0) = c;$$

(2) $$y_p = f\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = a\frac{\Delta x^2}{4} + b\frac{\Delta x}{2} + c;$$

(3) $$y_l = f\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) = a\frac{\Delta x^2}{4} - b\frac{\Delta x}{2} + c.$$

Dodając (2) i (3) stronami, otrzymujemy

$$y_l + y_p = 2a\frac{\Delta x^2}{4} + 2c = 2a\frac{\Delta x^2}{4} + 2y_s.$$

Po prostych przekształceniach uzyskujemy (patrz też rysunek 7)

$$a\frac{\Delta x^2}{4} = \frac{y_l + y_p - 2y_s}{2}.$$

Pole pod omawianym wycinkiem paraboli jest równe

$$S_S = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{d}x = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} ax^2\,\mathrm{d}x + \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} bx\,\mathrm{d}x + \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} c\,\mathrm{d}x =$$

$$= a\frac{x^3}{3}\Big|_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} + 0 + c\Delta x = \frac{2}{3}a\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3 + c\Delta x = \frac{2}{3}a\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + c\Delta x =$$

$$= \left(\frac{1}{3}a\frac{\Delta x^2}{4} + c\right)\Delta x = \left(\frac{1}{3}\frac{y_l + y_p - 2y_s}{2} + y_s\right)\Delta x = \frac{y_l + y_p + 4y_s}{6}\Delta x.$$

Otrzymaliśmy zatem wzór (1). Wyjaśniliśmy w ten sposób, jaki był sens przyjętego wyżej *ad hoc* przybliżenia, prowadzącego do metody Simpsona.