Zosia i Tadeusz na zakupach albo gry logiczne rozróżniające grafy

*Damian NIWIŃSKI**, *Marek ZAWADOWSKI***

*Instytut Informatyki Uniwersytetu Warszawskiego
**Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego

Wyobraźmy sobie dwoje ludzi, Zosię i Tadeusza, którzy rozmawiają o dwóch sklepach spożywczych. Tadeusz uważa, że sklepy niczym istotnym się nie różnią, podczas gdy Zosia twierdzi, że jej sklep jest lepszy (a w każdym razie różny) od sklepu Tadeusza. Oboje byli w obu sklepach.

`Zosia:` Do mojego sklepu jest bardzo wygodny dojazd, i autobusem i samochodem.
`Tadeusz:` Do mojego też jest wygodny dojazd, i autobusem i samochodem.
`Zosia:` Ale do twojego sklepu od przystanku autobusowego trzeba przejść przez światła.
`Tadeusz:` A do twojego to nie? Też masz zaraz za przystankiem pasy i światła.
`Zosia:` W moim sklepie mogę wziąć wózek przy wejściu i zostawić go po zakupach na parkingu koło samochodu.
`Tadeusz:` W moim sklepie też tak jest.
`Zosia:` Ale ja po wejściu mam blisko do najcięższych towarów: wody, soków, mleka, które powinny być na dnie wózka. Bardzo dobrze to zostało pomyślane.
`Tadeusz:` U mnie też ktoś o tym pomyślał i też tak jest.
`Zosia:` A ja mam zaraz po tym świeże pieczywo.
`Tadeusz:` U mnie też zaraz za ciężkimi towarami jest dział ze świeżym pieczywem.

I tak dalej, i tak dalej. Aż w końcu albo będzie tak, że Zosia odkryje jakąś różnicę:

`Zosia:` Ale u ciebie dział z owocami jest bardzo ściśnięty w kącie, jest mały wybór owoców i w dodatku są bardzo poobijane.
`Tadeusz:` . . . !? No tak, trzeba przyznać, że dział owocowy w twoim sklepie jest znacznie lepszy. Masz rację, Zosiu.

I będziemy wiedzieli, ze te sklepy nie są takie same, albo też Zosi nie uda się znaleźć niczego istotnego, co by odróżniało jeden sklep od drugiego:

`Tadeusz:` Wykonałaś już n prób wykazania, że nasze sklepy są różne. Gdyby tak było, to do tej pory odkryłabyś jakąś różnicę. Zatem musisz przyznać, że są takie same.
`Zosia:` . . . ? Masz rację, Tadeuszu.

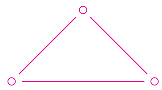
Istotą takiej rozmowy jest pewna gra, w wyniku której dwaj gracze – Tadeusz i Zosia, próbują ustalić na ile pewne dwie struktury są podobne. Jeśli po kolejnych kilku próbach gracze stwierdzą istotną różnicę, Tadeusz przyzna rację Zosi, w przeciwnym razie Zosia w końcu przyzna racje Tadeuszowi.

W matematyce struktury, które są być może różne, ale nie różnią się żadnym istotnym szczegółem nazywamy *izomorficznymi*. Ale rozważa się także słabsze formy podobieństwa. Gry wymyślone pięćdziesiąt lat temu przez polskiego matematyka Andrzeja Ehrenfeuchta są niejako matematycznym modelem przytoczonej wyżej rozmowy i nadają się bardzo dobrze do rozróżniania struktur różnych rodzajów.

W tym artykule przyjrzyjmy się strukturom, które matematycy nazywają *grafami*. Przypominają one nieco plan sieci kolejowej lub metra, a może planszę jakiejś gry. Graf składa się z *punktów*, z których niektóre połączone są *krawędziami*. Jednak ani kształt krawędzi, ani jej długość nie mają dla nas znaczenia. Krawędź jest to po prostu para (nieuporządkowana) dwóch różnych punktów. Co więcej, utożsamiamy grafy różniące się jedynie „nazwami” punktów.

Krawędzie można także przedstawić jako relację dwuargumentową E na zbiorze punktów: symetryczną (tzn. $E(x, y) \Rightarrow E(y, x)$) i przeciwzwrotną (tzn. $\neg E(x, x)$). W ogólności rozważa się także tzw. *grafy zorientowane*, gdzie E jest dowolną relacją dwuargumentową.

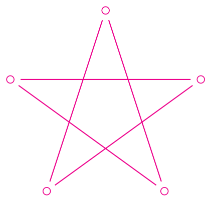
Na przykład rysunek

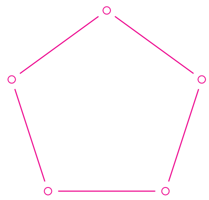


reprezentuje dokładnie *jeden* graf, możemy go przedstawić w różny sposób, np. wybierając punkty $1, 2, 3$ i krawędzie $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 1\}$ (lub, jeśli ktoś woli: punkty a, b, c, krawędzie $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}$, itp.).

W gruncie rzeczy, żeby przedstawić graf, nie trzeba go wcale rysować, wystarczy określić punkty i krawędzie. Z drugiej strony, ten sam graf można zwykle narysować na wiele sposobów. Na przykład graf o punktach $1, 2, 3, 4, 5$ i krawędziach $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 1\}$, możemy narysować

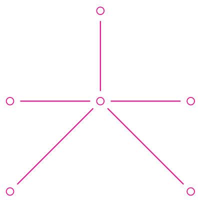
tak: lub tak:





Niektóre grafy, choć różne, jesteśmy skłonni uznać za „podobne”. Na przykład, uogólniając powyższe przykłady trójkąta i pięciokąta, uznamy za podobne do siebie wszystkie *cykle*, czyli grafy, które można narysować jako n-kąt, dla pewnego $n \geqslant 3$.

Natomiast graf



jest do nich raczej niepodobny.

Czy intuicję tę możemy wyrazić w języku matematyki?

Opiszemy teraz grę, której wynik dość trafnie wyznacza stopień podobieństwa dwóch grafów, powiedzmy G i H. Grać będą nasi dobrzy znajomi – Zosia i Tadeusz, przy czym, podobnie jak w rozmowie przytoczonej na wstępie, Zosia będzie poszukiwała różnicy, a Tadeusz bronił podobieństwa obu grafów.

Każdy z graczy dysponuje zestawem kamyczków, ponumerowanych $1, 2, 3, \ldots$. Kamyczki o różnych numerach są różne, natomiast kamyczki Zosi i Tadeusza nie muszą się odróżniać.

Gra toczy się w kolejnych rundach. W i-tej rundzie najpierw Zosia kładzie swój kamyczek numer i w dowolnym punkcie jednego z grafów, w którym jeszcze nie leży żaden kamyczek. Gdyby takiego punktu nie było, Zosia przegrywa. Jeśli Zosia wykona swój ruch, to z kolei Tadeusz kładzie swój i-ty kamyczek w pewnym wolnym punkcie pozostałego grafu. Gdyby takiego punktu nie było, Tadeusz przegrywa.

W ten sposób po i rundach i kamyczków każdego z graczy leży już w punktach jednego lub drugiego grafu. Po każdej rundzie sprawdza się zgodność „kamyczkowań". Otóż, jeśli w którymkolwiek z grafów kamyczki o numerach k i ℓ leżą w punktach połączonych krawędzią, a w pozostałym grafie tak nie jest, to Tadeusz przegrywa (Zosia wykazała różnicę).

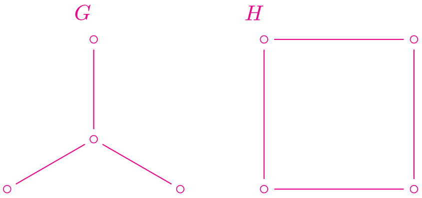
Zauważmy, że jeśli Tadeusz nie przegrał w ciągu n rund, to w każdym punkcie obu grafów leży już jakiś kamyczek. Ale wtedy G i H okazały się tym samym grafem (w języku matematyki mówimy, że G i H są *izomorficzne*)! Mianowicie grafem o punktach $1, 2, \ldots, n$ i krawędzi $\{j, k\}$ wtedy, gdy kamyczki j i k leżą na sąsiednich punktach w grafie G (ale tak samo jest w grafie H, skoro Tadeusz nie przegrał do tej pory).

Ogólnie, jeśli V_1 i V_2 są zbiorami wierzchołków grafów G i H, a E_1 i E_2 odpowiednio zbiorami ich krawędzi, to *izomorfizmem* jest funkcja wzajemnie jednoznaczna $f : V_1 \to V_2$, taka, że $\{p, q\} \in E_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{f(p), f(q)\} \in E_2$. Grafy są izomorficzne, kiedy istnieje taki właśnie izomorfizm.

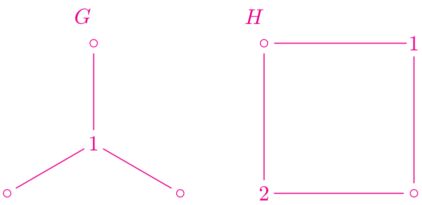
W przeciwnym razie, minimalna liczba rund, w której Zosia może pokonać Tadeusza (jakkolwiek dobrze by się bronił), jest miarą podobieństwa grafów: im mniej podobne są grafy, tym szybciej Zosia „odkrywa różnicę".

Czytelnik może spróbować wykazać, że jeśli dwa grafy *skończone* nie są izomorficzne, to Zosia wygrywa grę. Dla grafów nieskończonych tak być nie musi.

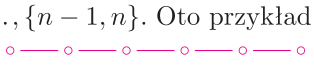
Zachęcamy Czytelnika, by przed dalszą lekturą rozegrał partię na następujących grafach:



Zosia może wygrać już w dwóch rundach, jeśli swój pierwszy kamyk położy w „centralnym" punkcie grafu G. W drugiej rundzie Zosia wybierze graf H, gdzie położy swój kamyk „na przekątnej" kamyka nr 1 (położonego przez Tadeusza). Łatwo zauważyć, że Tadeusz nie ma już dobrego ruchu, bo wszystkie wolne punkty w G są połączone z pozycją 1.



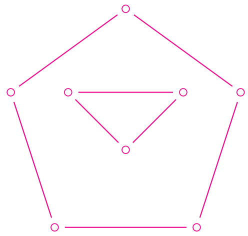
Zrobimy teraz obserwację ogólniejszą. *Odcinkiem* $—_n$ nazwiemy graf o n punktach $1, 2, \ldots, n$ i krawędziach $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{n-1, n\}$. Oto przykład $—_6$:



Pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie sprawdzenie, że jeśli G jest *dowolnym* cyklem, a H *dowolnym* odcinkiem, to Zosia wygrywa *najpóźniej* w 3 rundach.

Jak może się wydawać, znaleźliśmy użyteczną miarę podobieństwa (lub „różności") dwóch struktur. A jednak sprawa nie jest taka prosta. Co mianowicie powiemy o parze grafów, gdzie G jest cyklem o $2n$ punktach, a H składa się z dwóch rozłącznych cykli o n punktach? Oczywiście, G i H są tu także „całkiem niepodobne", a więc Zosia powinna szybko wygrać. A jednak intuicja nas myli. W pozostałej części artykułu postaramy się wykazać, że dla każdego m, Tadeusz może „utrzymać się" przez m rund, o ile tylko G i H są dostatecznie duże względem m.

Niech $\bigcirc_n$ oznacza cykl o n punktach, a $\bigcirc_n\bigcirc_m$ graf otrzymany jako suma rozłącznych kopii $\bigcirc_n$ i $\bigcirc_m$. Oto na przykład $\bigcirc_3\bigcirc_5$:



Twierdzenie. Tadeusz może tak grać, by nie przegrać w n rundach gry na grafach $\bigcirc_m$ i $\bigcirc_{k_1}\bigcirc_{k_2}$, o ile tylko $m, k_1, k_2 \geqslant 3^n$.

Oszacowanie 3^n zostało wzięte z naddatkiem, dla wygodnego dowodu. Czytelnik może podjąć próbę znalezienia lepszego (tzn. mniejszego) oszacowania.

W dowodzie przydadzą się grafy nieskończone. *Linią* nazwiemy graf, którego punktami są wszystkie liczby całkowite, a krawędzie są postaci $\{i, i+1\}$ dla wszystkich i; graf ten oznaczamy $\cdot\!\!—\!\!\cdot$. Głównym pomysłem naszego dowodu jest podobieństwo „dużego" cyklu do linii.

$$\cdots -3 — -2 — -1 — 0 — 1 — 2 — 3 \cdots$$

Przydatny będzie również graf, który otrzymamy z linii przez wyjęcie zera i wychodzących z niego krawędzi $\{-1, 0\}, \{0, 1\}$.

Oczywiście, ten sam graf moglibyśmy uzyskać usuwając tylko jedną dowolną krawędź, ale wygodnie jest nam pozbyć się właśnie zera, dla sprawnego liczenia w dowodzie Lematu 1.

Graf ten nazwiemy *ramionami* i oznaczymy $\bowtie$. O ramionach myślimy jak o grafie nieskończonym „naśladującym" odcinek, dlatego wygodnie jest narysować go tak:

$$-1 — -2 — -3 \cdots \qquad \cdots 3 — 2 — 1$$

Liczby niedodatnie stanowią lewe „ramię", a liczby dodatnie – prawe.

Krańcem w grafie nazwiemy punkt, który ma tylko jednego sąsiada. Powiemy, że Tadeusz *respektuje krańce* jeśli kładzie swój i-ty kamyczek na krańcu wtedy i tylko wtedy, gdy Zosia zrobiła podobnie ze swoim i-tym kamyczkiem.

Lemat 1. Tadeusz może grać respektując krańce i nie przegrać w k rundach gry na $—_m$ i $\bowtie$, o ile tylko $m \geqslant 3^k$.

Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem k. Przypadki $k = 1$ i $k = 2$ pozostawiamy Czytelnikowi. Przypuśćmy, że mamy już tezę lematu dla k i rozważmy $m \geqslant 3^{k+1}$. Określimy odpowiedź Tadeusza na ruch Zosi w pierwszej rundzie. Jak się okaże, dalej będzie już można skorzystać z założenia indukcyjnego. Przyjmijmy, że punktami odcinka —_{m+1} są $1, 2, \ldots, m + 1$.

Rozważmy najpierw przypadek, że Zosia położyła swój kamyczek nr 1 w odcinku, w punkcie p. Przypuśćmy, że bliższym krańcem jest 1, tzn. $p - 1 \leqslant m - p$ (w przeciwnym razie argument jest podobny). Wtedy Tadeusz kładzie swój kamyczek w tej samej odległości od krańca (na przykład) -1 w $\bowtie$, czyli na pozycji $-p$. Dlaczego właśnie tak?

Części leżące „na lewo” od kamyczka 1 są w obu grafach identyczne, a zatem Tadeusz może na nich grać po prostu wiernie naśladując ruchy Zosi. Respektowanie krańców gwarantuje zgodność z kamyczkiem numer 1.

Z kolei część odcinka —_{m+1} leżąca na prawo od kamyczka nr 1 stanowi pewien odcinek o co najmniej 3^k punktach, natomiast podgraf grafu $\bowtie$ leżący na prawo od kamyczka nr 1 jest, z dokładnością do przemianowania punktów identyczny z $\bowtie$. A zatem z założenia indukcyjnego (pozostało już tylko m rund!), Tadeusz ma strategię wygrania również na tych częściach. Składając strategie na lewych i prawych częściach, Tadeusz może bezpiecznie rozegrać pozostałe m rund.

Z kolei przypuśćmy, że w pierwszej rundzie Zosia położyła kamyczek nr 1 na pewnej pozycji p w $\bowtie$. Jeśli jej odległość od krańca jest co najwyżej $\frac{m+1}{2}$, to Tadeusz może położyć swój pierwszy kamyczek w tej samej odległości od krańca odcinka i dalej argument przebiega podobnie jak poprzednio.

Jeśli jednak odległość pozycji p od krańca $\bowtie$ jest większa niż połowa $m + 1$, Tadeusz kładzie swój pierwszy kamyczek na pozycji q „w środku” odcinka, w ten sposób, by na lewo i na prawo od pozycji q mieć odcinki dłuższe niż 3^k.

Otrzymujemy znowu dwie pary struktur: „długi” odcinek i $\bowtie$, z czym już umiemy sobie poradzić, oraz dwa odcinki dłuższe niż 3^k, nazwijmy je I_1 i I_2. Tu również możemy skorzystać z założenia indukcyjnego, choć w nieco subtelniejszy sposób. Wiemy mianowicie, że Tadeusz wygrywa m rund (respektując krańce) na parach grafów $(I_1, \bowtie)$ oraz $(I_2, \bowtie)$. To już wystarczy, by wygrać również na (I_1, I_2). Kiedy mianowicie Zosia kładzie swój kamyczek powiedzmy w I_2, Tadeusz patrzy, jak odpowiedziałby na to w $\bowtie$, a potem jak odpowiedziałby na tę odpowiedź w I_1, gdyby to był ruch nie jego, lecz Zosi. To działa!

Ta ostatnia metoda jeszcze się nam przyda, dlatego ujmiemy ją w oddzielny

Lemat 2. Relacja $\sim_n$ określona tak, że $G \sim_n H$ wtedy i tylko wtedy, gdy Tadeusz nie przegrywa w n rundach, jest przechodnia, tzn. $G \sim_n H$ i $H \sim_n J$ pociąga za sobą $G \sim_n J$.

Relacja $\sim_n$ jest również w oczywisty sposób zwrotna i symetryczna, a zatem jest relacją równoważności.

Lemat 3. Tadeusz może tak grać, by nie przegrać w n rundach gry na cyklu $\bigcirc_m$ i linii $\cdot\!\text{—}\!\cdot$, o ile tylko $m \geqslant 3^n$.

Przypadki $n = 1, 2$ pozostawiamy Czytelnikowi, rozważmy $n \geqslant 3$. Ze względu na symetrię obu struktur, pierwsza runda nie ma znaczenia. Przypuśćmy, że kamyczki nr 1 leżą już w $\bigcirc_m$ i $\cdot\!\text{—}\!\cdot$ na pozycjach, odpowiednio, p_1 i q_1 i Zosia bierze do ręki kamyczek numer 2. Jeśli położy go na pozycji p_2 w $\bigcirc_m$, to „rozetnie” cykl na dwie części; przypuśćmy, że w mniejszej z nich znajduje się α punktów (lub w każdej, gdy są równe). Wtedy Tadeusz kładzie swój kamyczek na pozycji q_2 w $\cdot\!\text{—}\!\cdot$, tak by pomiędzy q_1 a q_2 znajdowało się również dokładnie α punktów. Zauważmy, że część linii na zewnątrz odcinka od q_1 do q_2 tworzy $\bowtie$, a „większy” odcinek cyklu $\bigcirc_m$ ma co najmniej $3^{n-1} > 3^{n-2}$ punktów. Tak więc Tadeusz może dokończyć grę, korzystając z Lematu 1 i znanej nam już metody składania strategii na fragmentach grafów.

Jeśli zamiast tego Zosia kładzie swój kamyczek nr 2 na pozycji q_2 w linii $\cdot\!\text{—}\!\cdot$, to gdy liczba punktów pomiędzy q_1 i q_2 jest co najwyżej $\frac{m-1}{2}$, Tadeusz znajduje pozycję p_2 w cyklu w takiej samej odległości od p_1; w przeciwnym razie kładzie swój kamyczek nr 2 „możliwie najdalej” od kamyczka nr 1. Dalej argument przebiega podobnie.

Jeśli Czytelnik zrozumiał dowody Lematów 1 i 3, to nie sprawi mu kłopotu

Lemat 4. Tadeusz może tak grać, by nie przegrać w n rundach gry na dwóch grafach, z których jeden jest linią $\cdot\!\text{—}\!\cdot$, a drugi sumą dwóch rozłącznych linii: $\cdot\!\text{—}\!\cdot\ \cdot\!\text{—}\!\cdot$.

$$\cdots\cdots\ -3 \text{ —— } -2 \text{ —— } -1 \text{ —— } 0 \text{ —— } 1 \text{ —— } 2 \text{ —— } 3\ \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\ -3' \text{ —— } -2' \text{ —— } -1' \text{ —— } 0' \text{ —— } 1' \text{ —— } 2' \text{ —— } 3'\ \cdots\cdots$$

Trzeba podkreślić, że Lemat 4 nie oznacza, że Tadeusz *nigdy* nie przegra gry, gdyby toczyła się w nieskończoność (takie stwierdzenie nie byłoby prawdziwe).

Zauważmy wreszcie, że jeśli graf G jest sumą rozłącznych kopii grafów G_1 i G_2, a graf H jest sumą rozłącznych kopii grafów H_1 i H_2, oraz $G_1 \sim_n H_1$ i $G_2 \sim_n H_2$, to również $G \sim_n H$.

Nietrudno jest już teraz złożyć dowód Twierdzenia, bowiem z Lematów 2–4 i powyższej obserwacji otrzymujemy następujący ciąg równoważności $\sim_n$, dla $m, k_1, k_2 \geqslant 3^n$:

$$\begin{aligned} \bigcirc_m \ &\sim_n \ \cdot\!\text{—}\!\cdot \\ &\sim_n \ \cdot\!\text{—}\!\cdot\ \cdot\!\text{—}\!\cdot \\ &\sim_n \ \bigcirc_{k_1}\bigcirc_{k_2} \end{aligned}$$

Czy zatem nasza koncepcja rozróżniania struktur przez gry okazała się błędna? Nic podobnego! Jest ona bardzo użyteczna, m.in. w teorii baz danych. Jednak, jak każda metoda, ma też swoje granice. Jak pięćdziesiąt lat temu wykazał Andrzej Ehrenfeucht, są to granice *logiki pierwszego rzędu*.

Ale to już następna historia...