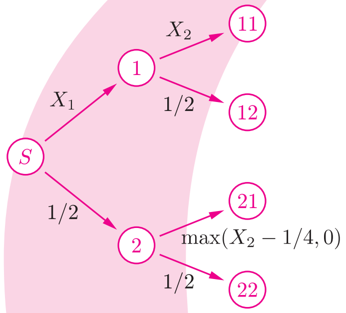
Wół, lis i konik polny

Rafał SZTENCEL *

Czarownica C w punkcie S na rozstaju dróg mówi: „Pójdziesz w prawo, dostaniesz pół złotego; pójdziesz w lewo, dostaniesz garść miedziaków z sakiewki – możesz je sobie przeliczyć. Ja jestem uczciwą czarownicą i kwota wyciągnięta z sakiewki ma rozkład prawie jednostajny na przedziale $[0,1]$.

Prawie, bo złotówka nie jest nieskończenie podzielna. W XVI w. 1 złoty dzielił się bardzo wygodnie na 30 groszy, 90 szelągów, 180 kwartników (ternarów) i 540 pieniążków, przy czym za kwartnik można było dostać 7 jaj (por. [1], s. 21, zad. 4).

Średnio dostajesz pół złotego. Chodziłeś do szkół – będziesz wiedział, co to znaczy. Nie chce mi się więcej gadać, rzuć okiem na plan. Uważaj na wiedźmina z dwójki. Pójdziesz w lewo – on weźmie z garści miedziaków coś na piwo (ile się da, ale nie więcej niż ćwierć złotego) i wypłaci resztę – jeśli zostanie”.



Może i słusznie czarownicy nie chciało się gadać. Formalny opis gry jest prosty. Wymaga dwóch niezależnych zmiennych losowych X_1, X_2 o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$. Oto wypłaty odpowiadające czterem możliwym drogom:

$$X_1 + X_2,\quad X_1 + \frac{1}{2},\quad \frac{1}{2} + \max\left(X_2 - \frac{1}{4}, 0\right),\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

W trzech przypadkach średnia wypłata jest równa 1, w jednym – nieco mniejsza.

Na rozstaju pojawia się wół, który nie lubi niespodzianek. Idzie dwa razy w prawo, wygrywa średnio (i zawsze) złotówkę. Konik polny lubi ryzyko, ale nie myśli. Idzie dwa razy w lewo, średnio dostaje złotówkę.

Lis akceptuje ryzyko i myśli. A myśli tak: jeśli za pierwszym razem miedziaków będzie mało, pójdę w prawo. I tak mam gwarantowane pół złotego, a może będzie lepiej? Ostatecznie lis (po konsultacji z niedźwiedziem) dochodzi do ogólnej teorii. Najpierw rozważa wypłaty w ostatnim kroku, gdzie wybór drogi jest oczywisty: niezależnie od tego, co już ma, wybiera większą z oferowanych wypłat. W stanie 1 otrzyma zatem $\max(X_2, \frac{1}{2})$, a w stanie 2 – $\max(\max(X_2 - \frac{1}{4}, 0), \frac{1}{2}) = \max(X_2 - \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Może nawet obliczyć średnie (szybki sposób na końcu artykułu):

$$E\max\left(X_2, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8},\qquad E\max\left(X_2 - \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{17}{32}.$$

To z kolei umożliwi mu podjęcie decyzji na starcie. Jeśli

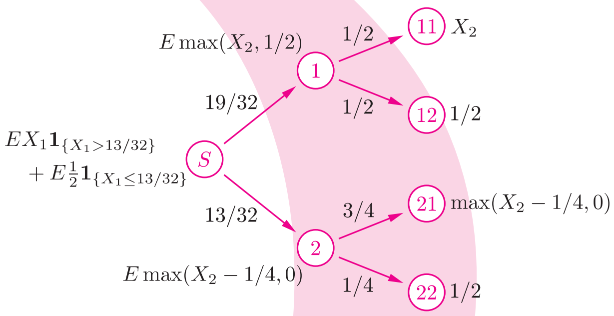
$$X_1 + \frac{5}{8} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{17}{32},$$

czyli $X_1 \leqslant \frac{13}{32}$, to idzie w prawo (teraz już wie dokładnie, co to znaczy, że miedziaków jest za mało: progiem decyzyjnym jest $73\frac{1}{8}$ kwartnika). W przeciwnym razie idzie w lewo. Co na tym zyskuje?

Zobaczmy. Średnia wygrana w pierwszym kroku jest równa

$$EX_1\mathbf{1}_{\{X_1 > \frac{13}{32}\}} + E\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{X_1 \leqslant \frac{13}{32}\}} = \frac{855}{2048} + \frac{13}{64} = \frac{1271}{2048},$$

gdzie pierwszy składnik odpowiada drodze w lewo, drugi – w prawo. Symbol $\mathbf{1}_A$ oznacza zmienną losową wskaźnikową zdarzenia A: przyjmuje ona wartość 1 na A i 0 na A'. W efekcie $E\mathbf{1}_A = P(A)$.



Drogę w lewo wybieramy z prawdopodobieństwem $\frac{19}{32}$ i wygrywamy w drugim kroku średnio $\frac{5}{8}$; dla drogi w prawo odpowiednie wielkości są równe $\frac{13}{32}$ i $\frac{17}{32}$, zatem średnio w drugim kroku mamy

$$\frac{19}{32}\cdot\frac{5}{8} + \frac{13}{32}\cdot\frac{17}{32} = \frac{380+221}{1024} = \frac{601}{1024}.$$

Ostatecznie lis wygrywa średnio

$$\frac{1271}{2048} + \frac{1202}{2048} = \frac{2473}{2048} \approx 1{,}208,$$

czyli o ponad 20% więcej niż wół i konik polny. W istocie lis znalazł sposób na uzyskanie największej możliwej średniej wygranej (czego nie udowodnimy).

Wyjaśnimy natomiast na zakończenie, jak zostały obliczone występujące powyżej średnie. Jeśli Z jest nieujemną zmienną losową, to

$$EZ = \int_0^\infty P(Z > t)\mathrm{d}t.$$

Gdy Z ma rozkład ciągły, wzór ten można otrzymać rutynowo: całkując przez części. Ale najbardziej pożyteczny staje się on w przypadku bardziej ogólnych rozkładów.

Obliczenie $E\max(X_2, \frac{1}{2})$ sprowadza się do obliczenia pola prostej figury geometrycznej. Z kolei $EX_1\mathbf{1}_{\{X_1>a\}}$ jest polem trapezu o wysokości $1-a$ i bokach a oraz 1; prosimy Czytelnika o sprawdzenie.

Literatura

[1] Witold Więsław, *Stare polskie zadania z matematyki*, Wydawnictwo Nowik, 2000.

---

*Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego