Quake, Doom i matematyka

Jerzy TYSZKIEWICZ*

Fanom gier komputerowych haseł „Quake” czy „Doom” nie trzeba tłumaczyć. To sławne sieciowe gry komputerowe, polegające głównie na bardzo realistycznym starciu zbrojnym, w którym każdy z graczy wciela się w jednego z żołnierzy. Mówi się o nich, że to gry FPS (ang. First-Person Shooter, strzelanina w pierwszej osobie).

Rozwiązanie zadania M 1134.
Oznaczmy przez $A(a, b)$ zbiór zawierający liczby a i b, ale nie zawierający żadnej liczby z przedziału (a, b).

Niech $S_1 = \{1, 2, \ldots, 100\}$ oraz $S_2 = \{101, 102, \ldots, 200\}$. Ponieważ zbiór $A(a, b)$ nie zawiera liczb z przedziału (a, b), więc dla dowolnych dwóch par (a, b), (c, d) takich, że $a, c \in S_1$ oraz $b, d \in S_2$ zbiory $A(a, b)$, $A(c, d)$ są różne. Zatem zbiorów A_i spełniających warunki zadania jest co najmniej tyle, ile różnych par (a, b), dla których $a \in S_1$ oraz $b \in S_2$. Natomiast takich par jest $100 \cdot 100 = 10\,000$.

Czy matematyk może mieć z nich jakiś pożytek zawodowy, oprócz wyładowywania frustracji po kolejnej nieudanej próbie znalezienia dowodu/błędu w dowodzie/rozwiązaniu (niewłaściwe skreślić)? O dziwo – tak. Matematyczne zasady używane były z powodzeniem do opisywania tak wielu różnych aspektów i zjawisk naszej rzeczywistości, że nie może dziwić, iż także wojna znalazła się wśród nich.

Wyobraźmy sobie dwie niezbyt duże grupy wrogich sobie żołnierzy, spotykające się na odkrytym terenie. Oczywiście wywiązuje się walka. Obie strony strzelają, trup ściele się gęsto... No właśnie, jak gęsto? Policzmy. Niech w chwili t oddział A ma $a(t)$ żołnierzy, a oddział B ma ich $b(t)$. Załóżmy, że w każdym z oddziałów żołnierze są jednakowo wyszkoleni i uzbrojeni. W krótkim odcinku czasu o długości $[t, t + \Delta t]$ straty oddziału A są zatem proporcjonalne do liczebności oddziału B oraz Δt i wynoszą, powiedzmy, $\beta\, b(t)\Delta t$. Istotnie, przy ustalonej szybkostrzelności broni tych z B oddają oni liczbę strzałów proporcjonalną do $b(t)\Delta t$, z których z kolei stały ułamek trafia celu, wobec ustalonego poziomu wyszkolenia. Symetrycznie, straty oddziału B to $\alpha\, a(t)\Delta t$. Mamy

$$a(t + \Delta t) - a(t) = -\beta\, b(t)\Delta t,$$

skąd po przekształceniu

$$\frac{a(t + \Delta t) - a(t)}{\Delta t} = -\beta\, b(t),$$

a po przejściu do granicy przy $\Delta t \to 0$,

$$\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} = -\beta\, b(t) \tag{1}$$

oraz symetrycznie

$$\frac{\mathrm{d}b(t)}{\mathrm{d}t} = -\alpha\, a(t). \tag{2}$$

Układ równań różniczkowych (1) i (2) to *równania Lanchestera*, zwane tak od nazwiska wybitnego angielskiego teoretyka i praktyka konstrukcji samochodów i samolotów Fredericka Williama Lanchestera, który je wyprowadził w 1916 roku. Mimo swojej prostoty, jak wielu fachowców twierdzi, nadmiernej, równania Lanchestera były i nadal są studiowane jako matematyczny model walki zbrojnej.

Nas będzie interesowało tak zwane *kwadratowe prawo Lanchestera*, które daje się wyprowadzić z równań Lanchestera i ma postać

$$\alpha\, a(t)^2 - \beta\, b(t)^2 = \text{const.} \tag{3}$$

Wyprowadzenie dla amatorów sportów ekstremalnych, których nie przeraża rodeo z notacją Leibniza. Najpierw dzielimy (1) stronami przez (2) i dostajemy

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}b} = \frac{-\beta b}{-\alpha a},$$

skąd

$$\alpha a \mathrm{d}a = \beta b \mathrm{d}b.$$

Skoro powyższe wyrażenia są równe, to można je oba scałkować w sposób nieoznaczony, dostając kolejno

$$\int \alpha\, a \mathrm{d}a = \int \beta\, b \mathrm{d}b,$$

$$\alpha \frac{a^2}{2} + c_a = \beta \frac{b^2}{2} + c_b,$$

$$\alpha a^2 - \beta b^2 = 2c_b - 2c_a = \text{const.}$$

Gotowe.

Jego konsekwencją jest to, że jeszcze przed rozpoczęciem walki można obliczyć wartość $M = \alpha\, a(0)^2 - \beta\, b(0)^2$, która wskaże przyszłego zwycięzcę: jeśli $M > 0$, to wygra oddział A i w dodatku w momencie t ostatecznego pokonania B jego liczebność będzie (teoretycznie) spełniała zależność

$$\alpha\, a(t)^2 - \beta\, \underbrace{b(t)}_{0}{}^2 = M,$$

czyli $a(t) = \sqrt{M/\alpha}$, a symetrycznie gdy $M < 0$, to wygra B, z którego przeżyje około $\sqrt{-M/\beta}$ żołnierzy. Dla $M = 0$ starcie będzie bliskie nierozstrzygniętemu.

Prawo to ma niespodziewane konsekwencje: liczebność wpływa na „potencjał bojowy” oddziału (reprezentowany przez wartość $\alpha\, a(t)^2$) daleko silniej, bo kwadratowo, niż liniowe w swoim efekcie wyposażenie i wyszkolenie. Oczywiście, nie jest to do końca prawda, bo w rzeczywistości odpowiednio lepsze uzbrojenie

*Instytut Informatyki Uniwersytetu Warszawskiego

i wyszkolenie nie tylko podnoszą α, ale i zmniejszają β, zgodnie z maksymą „im więcej potu na ćwiczeniach, tym mniej krwi w boju”.

Żeby zrozumieć konsekwencje tego prawa, wyobraźmy sobie dwa oddziały A i B o równym potencjale, czyli takie, że $M = 0$. W razie walki straty A wyniosłyby $a(0)$ (czyli wszystkich) żołnierzy. Niech teraz dowódca A uzyska posiłki i dysponuje $2\,a(0)$ żołnierzy, po czym dopiero doprowadzi do starcia z B. Nowe M wyniesie w tym przypadku

$$\alpha\,(2\,a(0))^2 - \beta\,b(0)^2 = 3\,\alpha\,a(0)^2 + \underbrace{(\alpha\,a(0)^2 - \beta\,b(0)^2)}_{0} = 3\,\alpha\,a(0)^2.$$

Zatem straty A wyniosą, zgodnie ze wzorem, tylko

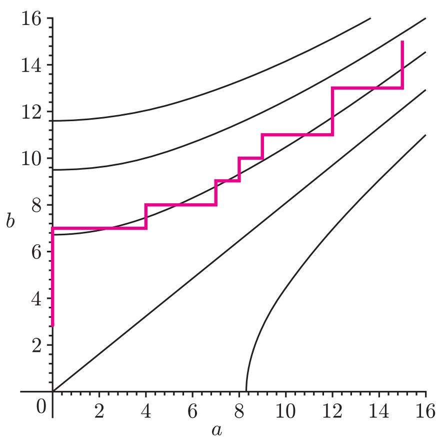
$$2\,a(0) - \sqrt{3\,\alpha\,a(0)^2/\alpha} \approx 0,23\,a(0).$$

Przy podwojeniu sił straty spadły ponad czterokrotnie!

Hola, hola. A czy to wszystko ma w ogóle jakiś sens i związek z rzeczywistością? I jak to sprawdzić, nie organizując ani igrzysk gladiatorów, ani nie wywołując wojny? Otóż i miejsce, gdzie Quake i Doom przydają się matematykowi w pracy. Starcie zbrojne można przecież całkiem łatwo zorganizować w przestrzeni wirtualnej.

Tak też postąpił autor ze swoimi studentami. W czasie Festiwalu Nauki 2005 zorganizowaliśmy zespołowe turnieje gry w BZFlag (to inna gra typu FPS, trochę mniej krwawa i łatwiejsza w obsłudze informatycznej niż te poprzednie). Wyniki walki rejestrowaliśmy, a potem analizowaliśmy w sali wykładowej w obecności niedawnych „żołnierzy”, porównując narastanie strat w obu zespołach z przewidywaniami kwadratowego prawa Lanchestera. Musimy się przyznać, że dla lepszej weryfikacji prawa w tajemnicy zmniejszyliśmy szybkostrzelność broni jednego z zespołów o połowę. Wobec małej liczebności drużyn i braku możliwości spełnienia postulatu o równym wyszkoleniu, nie wszystkie przebiegi pasowały do teoretycznego modelu. Jednak wielokrotnie zgodność była całkiem dobra. Wynik przedstawialiśmy na wykresie: po zarejestrowaniu wszystkich chwilowych liczebności obu oddziałów powstały zbiór punktów przedstawialiśmy na płaszczyźnie. W teorii punkty te powinny układać się na krzywej opisanej równaniem: $\alpha\,a^2 - \beta\,b^2 = M$, dla pewnego M. Interpretując wyniki eksperymentu, musieliśmy dobierać α, β i M tak, aby uzyskać jak najlepszą zgodność łamanej obrazującej realną walkę z krzywą teoretyczną.

Poniżej widać wynik jednego z takich „udanych” eksperymentów. Eksperymentalnie dobrane stałe to $\alpha = 0{,}65$, $\beta = 1$ i $M = -45$. Czarne kreski to krzywe teoretyczne dla różnych M, kolorowa to wynik eksperymentu.

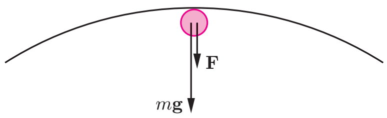


Jest w nim tylko jedna skaza: gwałtowny pionowy spadek liczebności B po wyeliminowaniu A. Tak, jakby prawo Lanchestera nagle przestało obowiązywać, za to zaczęły się dziać cuda. I tu, na zakończenie, pytanie do Czytelników z wyobraźnią: co się stało? Odpowiedź wewnątrz numeru.

Rozwiązanie zadania F 667.
Wysokość musi wynosić co najmniej R, aby kulka mogła pokonać tor. Zauważmy ponadto, że gdy zmniejszając wysokość początkową, a przy tym prędkość, doprowadzimy do oderwania się kulki, nastąpi to w najwyższym punkcie pętli. Kulka ma tam prędkość

$$v = \sqrt{2g(h-2R)},$$

a działające na nią siły to siła ciężkości i siła reakcji na nacisk na tor (rys. 1).



Przyspieszenie kulki skierowane jest w dół i wynosi

$$a = \frac{v^2}{R} = 2g\left(\frac{h}{R} - 2\right).$$

Z drugiej zasady dynamiki

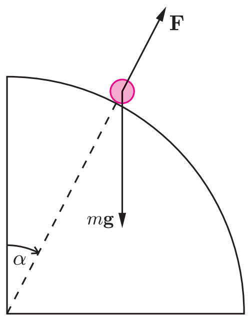
$$ma = mg + F$$

czyli

$$F = mg\left(\frac{2h}{R} - 5\right).$$

Oczywiście $F > 0$, czyli $h > \frac{5}{2}R$.

Rozwiązanie zadania F 668.
Niech α oznacza kąt między prostą l łączącą środek krzywizny toru ze środkiem kulki a pionem (rys. 2).



Prędkość kulki w czasie ruchu obliczamy z zasady zachowania energii

$$v = \sqrt{2gR(1-\cos\alpha)}.$$

Na kulkę działa siła ciężkości i siła reakcji $\vec{F}$. Rozważmy składową równoległą do prostej l równania wyrażającego drugą zasadę dynamiki

$$mg\cos\alpha - F = \frac{v^2}{R}m.$$

Stąd

$$F = 3mg\cos\alpha - 2mg.$$

Oderwanie nastąpi, gdy wielkość ta znika, czyli dla

$$\alpha = \arccos\frac{2}{3}.$$