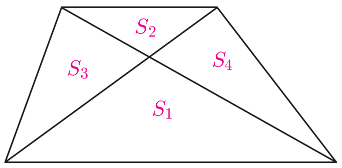
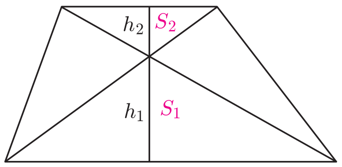
Jeszcze jedna



Rys. 1



Rys. 2

W artykule J. Jaszuńskiej w *Delcie* 10/2005 podane zostały dowody różnych nierówności przeprowadzone przez rozważanie geometrycznych własności trapezu. Chciałem podać pewną, niepodaną tam zależność związaną z trapezem. Zależnością tą, przy oznaczeniach z rysunku 1, jest

$$(\star)\qquad \sqrt{S_1 \cdot S_2} = \frac{S_3 + S_4}{2},$$

czyli swoista równość średniej geometrycznej i arytmetycznej.

Jak łatwo zauważyć, nierówność ta, wobec $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ (gdzie S to pole całego trapezu), wynika bezpośrednio z zależności

$$S = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 \cdot S_2}.$$

Ta z kolei równość ma następujący dowód: ponieważ z podobieństwa dolnego i górnego trójkąta (oznaczenia z rysunku 2) otrzymujemy

$$\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{a}{b},$$

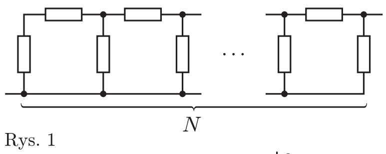
więc

$$\begin{aligned} S =& \frac{1}{2}(a+b)(h_1+h_2) = \frac{ah_1}{2} + \frac{bh_2}{2} + \frac{bh_1}{2} + \frac{ah_2}{2} = \\ =& S_1 + S_2 + \frac{h_2}{2}\left(b\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} + a\right) = S_1 + S_2 + \frac{h_2}{2}\left(b\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} + b\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}\right) = \\ =& S_1 + S_2 + S_2 \cdot 2\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 \cdot S_2}. \end{aligned}$$

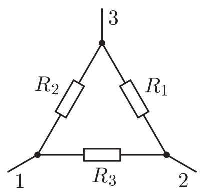
Piękno równości $(\star)$ psuje trochę fakt, że w trapezie jest $S_3 = S_4$ (a gdy jest to równoległobok czy wręcz prostokąt, równości jest jeszcze więcej). Powstaje pytanie: czy istnieje czworokąt wypukły, inny niż wymienione, w którym spełniona jest równość $(\star)$? Wydaje się, że nie. Ale może Czytelnicy podadzą jakiś przykład?

Andrzej WRZESIEŃ

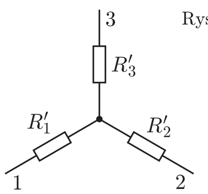
Zadania



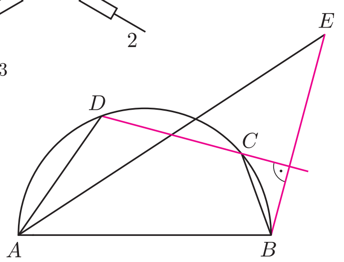
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 665. Dany jest układ jednakowych oporników z rysunku 1. Podać wzór rekurencyjny na opór zastępczy R_N dla układu o N oczkach i zbadać granicę $N \to \infty$.
Rozwiązanie na str. 6

F 666. Dany jest układ oporników z rysunku 2 o znanych oporach R_1, R_2 i R_3. Jakie muszą być opory elektryczne R_1', R_2' i R_3' oporników z układu na rysunku 3, aby opór mierzony między dowolnymi dwoma spośród punktów 1, 2 i 3 był taki sam, jak w układzie 1?
Rozwiązanie na str. 3

Redaguje Waldemar POMPE

M 1129. Na lekcji jest 30 uczniów, którzy siedzą w 15 ławkach dwuosobowych. Okazało się, że dokładnie połowa wszystkich dziewcząt siedzi w ławce z chłopcami. Rozstrzygnąć, czy można tak przesadzić uczniów, aby dokładnie połowa wszystkich chłopców siedziała w ławce z dziewczętami.
Rozwiązanie na str. 16

M 1130. Na czworokącie $ABCD$ jest opisany okrąg o średnicy AB (rys. 4). Punkt E jest symetryczny do punktu A względem środka odcinka CD. Dowieść, że proste CD i BE są prostopadłe.
Rozwiązanie na str. 16

M 1131. Ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_{400}$ liczb całkowitych dodatnich jest określony wzorem rekurencyjnym

$$a_{n+1} = d(a_n) + d(n) \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots, 399\,,$$

gdzie $d(k)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby k. Udowodnić, że w ciągu tym występuje co najwyżej 210 liczb pierwszych.
Rozwiązanie na str. 16