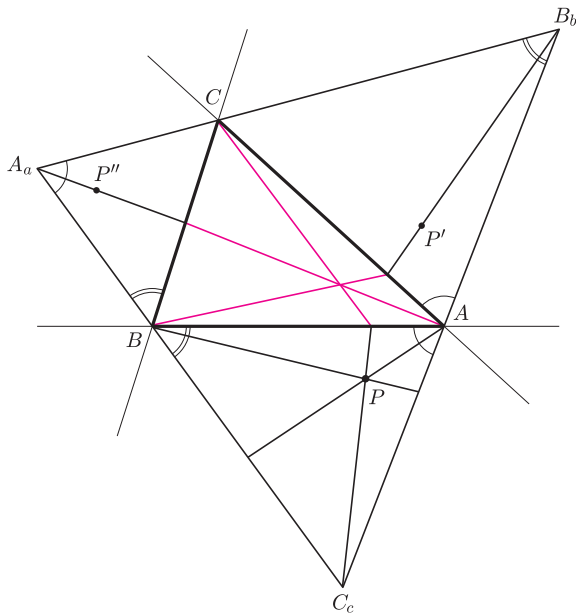


Rozważmy następującą konstrukcję:

Dla danego trójkąta  $ABC$  rysujemy dwusieczne jego kątów zewnętrznych. Tworzą one trójkąt  $A_a B_b C_c$ , którego każdy wierzchołek jest środkiem pewnego okręgu dopisanego do trójkąta  $ABC$ . Nowopowstałe trójkąty  $ABC_c$ ,  $BCA_a$  i  $CAB_b$  nazywamy trójkątami dopisanymi. Nietrudno zauważyć, że trójkąty dopisane są podobne. Następnie wybieramy jeden z tych trójkątów, np. trójkąt  $ABC_c$  i pewien punkt  $P$ . Niech punkt  $P'$  będzie obrazem punktu  $P$  w podobieństwie przekształcającym trójkąt  $ABC_c$  w trójkąt  $CAB_b$ . Analogicznie wyznaczamy punkt  $P''$  dla trzeciego trójkąta dopisanego. Teraz przez punkty  $C_c$  i  $P$  prowadzimy prostą. Odpowiadająca jej czerwona prosta wyznaczona jest przez punkt  $C$  i punkt przecięcia prostej  $C_c P$  z prostą  $AB$  lub jest równoległa do  $AB$ , gdy prosta  $C_c P$  jest równoległa do  $AB$ . Analogicznie proste  $B_b P'$  oraz  $A_a P''$  wyznaczają dwie dodatkowe czerwone proste.



Rys. 1

Prawdziwe jest

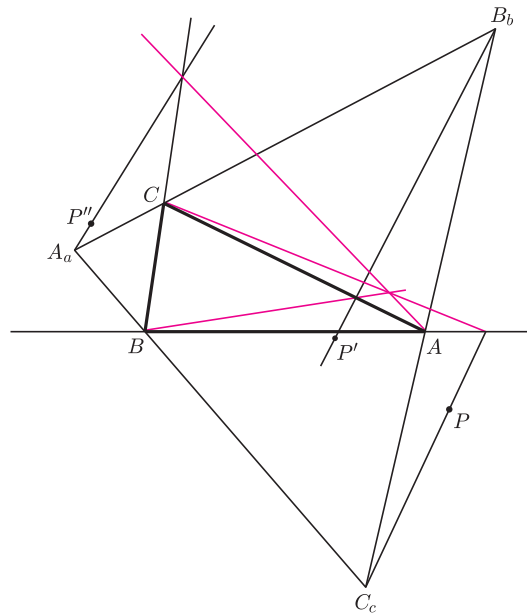
**Twierdzenie 1.**

*Czerwone proste przecinają się w jednym punkcie.*

Podamy dowód dla przypadku, gdy proste  $C_c P$ ,  $B_b P'$  i  $A_a P''$  przecinają się z odpowiednimi bokami (lub ich przedłużeniami) wyjściowego trójkąta.

**Dowód.**

Zauważmy, że prosta przechodząca przez punkty  $B$  i  $P$  jest odpowiednia do prostej  $B_b P'$  (bo w omawianym wyżej podobieństwie punkt  $B$  przechodzi na  $B_b$ , a  $P$  na  $P'$ ). Analogicznie prosta  $AP$  jest odpowiednia do prostej  $A_a P''$ . W takim razie czerwone proste dzielą boki  $AB$ ,  $BC$  i  $CA$  (lub ich przedłużenia) tak samo, jak proste  $C_c P$ ,  $BP$ ,  $AP$  dzielą boki trójkąta  $ABC_c$  (lub ich przedłużenia). Ponieważ te trzy proste w trójkącie  $ABC_c$  przecinają się w jednym punkcie, więc na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy, czerwone proste też przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 2

Widzimy, że jeżeli względem pewnego trójkąta dopisanego (np.  $ABC_c$ ) obierzemy punkt  $P$ , to  $P$  jednoznacznie wyznacza dwa punkty  $P'$  i  $P''$ . Ta trójka punktów wyznacza z kolei punkt przecięcia czerwonych prostych. Można więc powiedzieć, że powyższa konstrukcja przekształca punkt  $P$  w punkt wspólny tych prostych.

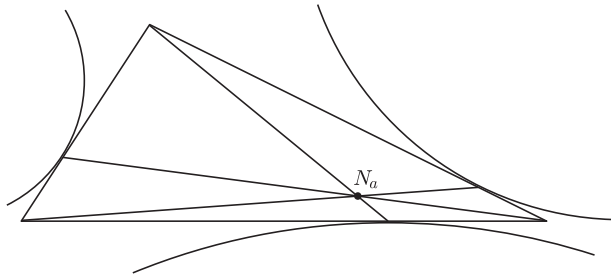
Okazuje się, że tak zdefiniowane przekształcenie ma wiele ciekawych właściwości. Nietrudno na przykład zauważyć, że obrazem środka ciężkości trójkąta  $ABC_c$  jest środek ciężkości trójkąta  $ABC$ . Istnieje jednak więcej szczególnych punktów trójkąta  $ABC_c$ , których obrazy są szczególnymi punktami trójkąta  $ABC$ . Obrazuje to następująca tabela:

w trójkącie $ABC_c$	obraz w trójkącie $ABC$
środek okręgu opisanego ( $O$ )	środek okręgu wpisanego ( $L$ )
środek ciężkości ( $G$ )	środek ciężkości ( $G'$ )
środek okręgu 9 punktów ( $N_9$ )	punkt Spieker'a ( $Sp$ )
ortocentrum ( $H$ )	punkt Nagela ( $Na$ )

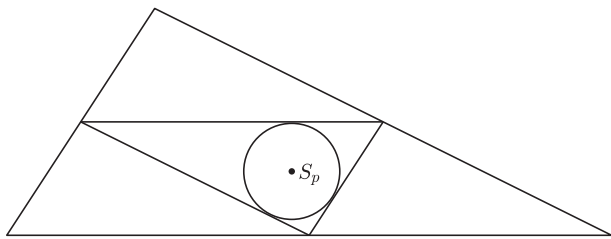
\*Michał Marcinkowski, uczeń III LO we Wrocławiu

Jest to skrót pracy nagrodzonej złotym medalem na Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki, 2005.

Punkt Nagela (rys. 3) to punkt przecięcia się odcinków łączących wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgów dopisanych do przeciwnych boków tego trójkąta, a punkt Spieker (rys. 4) to środek okręgu wpisanego w trójkąt powstały przez połączenie środków boków trójkąta wyjściowego.



Rys. 3

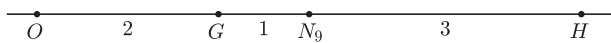


Rys. 4

Niemniej ważną cechą przekształcenia jest jego afiniczność (dokładniej: przekształcenie jest powinowactwem osiowym wyznaczonym przez wektor  $\overrightarrow{C_c C}$  i prostą  $AB$ ). Dodatkowo, dowolnie wybrana prosta, jej obraz i prosta  $AB$  przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe (wektor  $\overrightarrow{C_c C}$  i oś  $AB$  są tutaj wyróżnione, ponieważ przekształcamy względem trójkąta  $ABC_c$ ).

Zajmijmy się teraz tytułowymi bohaterami pracy.

Znany jest fakt, że w każdym trójkącie punkty  $O$ ,  $G$ ,  $N_9$  i  $H$  leżą na jednej prostej (tzw. *prostej Eulera*) a stosunki odległości między tymi punktami są takie jak na rysunku niżej.



Rys. 5

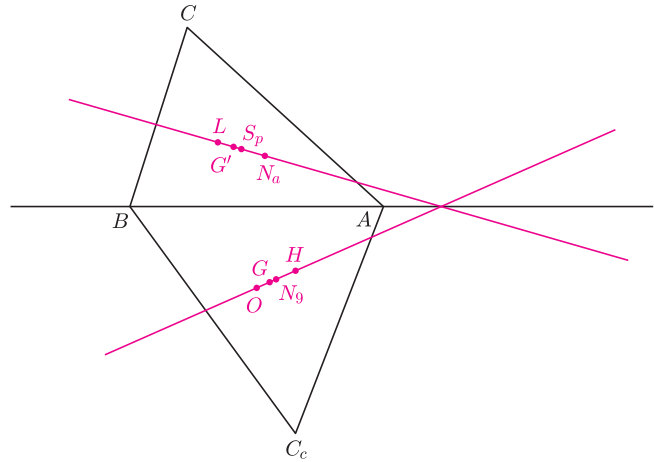
Euler z całą pewnością udowodnił, że punkty  $O$ ,  $G$  i  $H$  są współliniowe. O istnieniu okręgu dziewięciu punktów wiedział (w 1765 roku pokazał nawet, że przechodzi przez środki boków trójkąta wyjściowego). Czy wiedział o tym, że  $N_a$  należy do prostej nazwanej później jego imieniem? Jednoznacznej odpowiedzi nie znalazłem, ale jest bardzo możliwe, że tak. Dowód tego faktu nie jest przecież trudny.

Christian Heinrich von Nagel (1803–1882) odkrył inną ciekawą prostą trójkąta (tzw. *prostą Nagela*), na której leży  $L$ ,  $G'$  (dla odróżnienia od  $G$ ),  $S_p$  i  $N_a$ .

Z podanej wyżej tabeli i faktu, że przekształcenie jest afiniczne, wynika

**Twierdzenie 2.**

*Obrazem prostej Eulera trójkąta dopisanego jest prosta Nagela trójkąta  $ABC$ .*



Rys. 6

Stąd od razu mamy

**Wniosek 3.**

*Prosta Eulera trójkąta  $ABC_c$ , prosta Nagela trójkąta  $ABC$  i prosta  $AB$  spotykają się w jednym punkcie lub są równoległe.*

**Wniosek 4.**

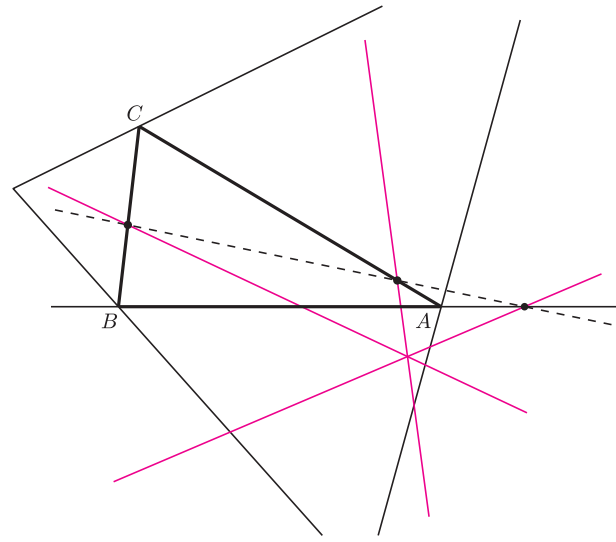
*Stosunki odległości między omawianymi punktami prostej Nagela są takie same jak stosunki odległości między odpowiadającymi im punktami na prostej Eulera (jest to cecha przekształceń afinicznych).*

Na koniec narysujmy (rys. 7) trójkąt  $ABC$  z trzema trójkątami dopisanymi, prostą Nagela trójkąta  $ABC$  (przerywana) i proste Eulera dla trzech trójkątów dopisanych (czerwone). Widzimy trzy charakterystyczne punkty. W każdym z nich przecinają się trzy proste: prosta Nagela, jedna spośród trzech prostych Eulera i prosta zawierająca któryś z boków trójkąta  $ABC$ . Istnienie takich trzech punktów wynika z wniosku 3 zastosowanego do każdego trójkąta dopisanego z osobna (trójkąt  $ABC_c$  wybraliśmy tylko dla ustalenia uwagi). Na rysunku widzimy jednak jeszcze jeden specyficzny punkt. Rzeczywiście, zachodzi

**Twierdzenie 5.**

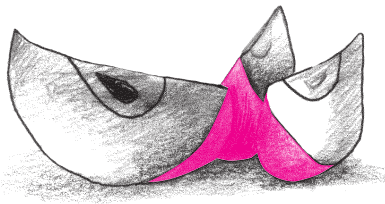
*Trzy proste Eulera trójkątów dopisanych przecinają się w jednym punkcie.*

Możliwości eksploatacji tematu jest naprawdę wiele. Pokazana dualność między prostymi Eulera i Nagela pozwala przeformułować pewne twierdzenia o prostej Eulera na dualne twierdzenia dotyczące prostej Nagela (takim jest np. warunek konieczny na równoległość prostej Eulera do pewnego boku trójkąta). Można też szukać następných szczególných punktów trójkąta i badać ich obrazy, analogicznie można postępować z prostymi. Na uwagę zasługuje encyklopedia Clarka Kimberlinga (<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia>), w której opisane zostało 3055 szczególných punktów trójkąta! Na stronach MathWorld (<http://mathworld.wolfram.com/CentralLine.html>) można znaleźć kilkanaście charakterystycznych prostých trójkąta. Materiał badawczy jest praktycznie niewyczerpywalny.



Rys. 7

## Drobiazgi



Astronomicznym odpowiednikiem słynnego problemu kury i jajka jest np. zagadnienie, czy uformowane wcześniej galaktyki zebrały się w gromady galaktyk, czy też ogromne obłoki rozproszonej materii podzieliły się na fragmenty, z których dopiero powstały galaktyki. W świecie gwiazd sprawa wydaje się rozstrzygnięta: obłoki materii w miarę zgęszczania się ogrzewają się, co razem sprzyja rozpadowi na mniejsze fragmenty, a z nich w końcu powstają gwiazdy. Na zdrowy rozum, mechanizm ten mógłby działać też w większej skali. Jednak obserwacje najbliższej gromady galaktyk, gromady w Pannie (Virgo), sugerują coś przeciwnego. Gromada ma mianowicie dwie koncentracje, z których każda w centrum mieści wielką galaktykę eliptyczną. Koncentracje te najwyraźniej spadają na siebie – dowodzi tego rozkład przestrzenny galaktyk i ich prędkości radialne. Wreszcie galaktyki różnych typów są w tych podgromadach nie wymieszane: galaktyki eliptyczne (masywne) grupują się w pobliżu centrów, a spiralne (lżejsze) na peryferiach podgromad (nazywa się to efektem segregacji galaktyk, a występuje on w licznych gromadach). Ten fakt akurat można tłumaczyć dwojako. Może on oznaczać, że gromady nie osiągnęły jeszcze stanu równowagi, albo że właśnie są stare w skali kosmicznej, gdyż pojawianie się efektu segregacji z upływem czasu potwierdzają numeryczne symulacje mechanicznej ewolucji gromad. Badania ewolucji gromad stawiają dopiero pierwsze kroki.

\* \* \*

Średnią odległość  $\langle r \rangle$  planety od Słońca można obliczyć np. jako średnią (niech już będzie: arytmetyczną) wielu pomiarów  $r$  wykonanych w jednakowych odstępach czasu  $t$  w ciągu pełnego obiegu planety. Ale można też uśrednić pomiary  $r$  wykonane w jednakowych odstępach kąta  $v$  między kierunkiem  $r$  a kierunkiem na perihelium (kąten ten nazywa się anomalią prawdziwą). A jeżeli obliczyć średnią arytmetyczną po prostu najmniejszej i największej odległości planety od Słońca, to co wyjdzie? A ile wynosi średnia geometryczna tych dwóch odległości? A ich średnia harmoniczna? Wszystkie te średnie są różne. Oto one ( $a$  oznacza wielką półoś elipsy,  $e$  jej mimośród):

$$\langle r \rangle_t = a(1 + e^2/2), \quad \langle r \rangle_v = a\sqrt{1 - e^2} = b,$$

$$(r_{\min} + r_{\max})/2 = a, \quad \sqrt{r_{\min}r_{\max}} = b,$$

$$\left( \frac{1}{r_{\min}} + \frac{1}{r_{\max}} \right)^{-1} = a(1 - e^2)/2.$$

Można skonstruować kąt (zwany anomalią mimośrodową), względem którego uśrednione  $r$  wynosi  $a$ .

T. K.



### Rozwiązanie zadania F 666.

Niech  $r_{kl}$  oznacza opór mierzony między punktami  $k$  i  $l$ . W układzie 1 między 1 i 2 mamy połączenie równoległe opornika  $R_3$  z połączeniem szeregowym  $R_1$  i  $R_2$ , czyli

$$r_{12} = \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right)^{-1} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

oraz

$$r_{13} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

i

$$r_{23} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

W układzie 2 między tymi samymi punktami jest tylko połączenie szeregowe  $R'_1$  i  $R'_2$ , czyli  $r_{12} = R'_1 + R'_2$ , analogicznie  $r_{13}$  i  $r_{23}$ . Łącząc otrzymane wzory, dostajemy

$$R'_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3},$$

$$R'_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

i

$$R'_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}.$$