Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2006

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
404 ($WT = 1{,}83$) i **405** ($WT = 1{,}98$)
z numeru 10/2005

Jerzy Witkowski	– Radlin	47,60
Mateusz Łącki	– Kraków	36,53
Konrad Kapcia	– Częstochowa	27,70
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	20,84
Tomasz Tkocz	– Rybnik	18,90

Witamy nowego członka Klubu 44F – p. Jerzego Witkowskiego.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 519, 520

Redaguje Marcin E. KUCZMA

519. Czy istnieje nieskończony ciąg liczb dodatnich $a_1, a_2, a_3, \ldots$, dla którego szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_n^2}$ są oba zbieżne?

520. Na płaszczyźnie dane są dwa okręgi Ω_1 i Ω_2, o różnych promieniach i środkach (odpowiednio) O_1 i O_2, przecinające się w punktach A i B tak, że kąt O_1AO_2 jest prosty. Na odcinku AB obieramy dowolny punkt X różny od A, B oraz środka odcinka AB. Prosta O_1X przecina okrąg Ω_2 w punktach P_1 i Q_1, prosta O_2X przecina okrąg Ω_1 w punktach P_2 i Q_2, przy czym punkty P_1 i P_2 leżą na odcinkach O_1X i O_2X. Wykazać, że proste P_1P_2, Q_1Q_2 i O_1O_2 mają punkt wspólny i że ten punkt nie zależy od wyboru punktu X.

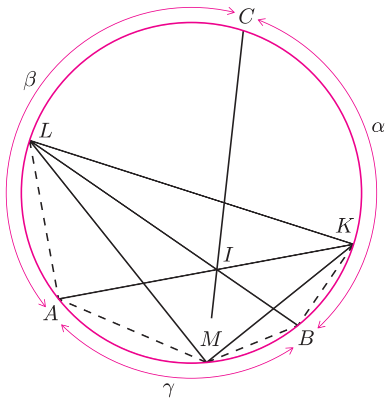
Zadanie 520 zaproponował pan Piotr Achinger z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/2005

Przypominamy treść zadań:

511. Okręgi k_1, k_2, k_3 (na płaszczyźnie) przecinają się parami: $k_2 \cap k_3 = \{K, X\}$, $k_3 \cap k_1 = \{L, Y\}$, $k_1 \cap k_2 = \{M, Z\}$. Środek każdego okręgu leży na zewnątrz dwóch pozostałych okręgów. Ponadto istnieje okrąg przechodzący przez punkty K, L, M oraz środki okręgów k_i. Udowodnić, że jeśli K, L, M są trzema różnymi punktami, to punkty X, Y, Z pokrywają się.

512. Dana jest liczba całkowita dodatnia n. Wykazać, że równanie $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{n}$ ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych x, y wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest podzielna przez sześcian liczby całkowitej większej od 1.



511. Niech ω będzie okręgiem przechodzącym przez parami różne punkty K, L, M oraz środki A, B, C okręgów (odpowiednio) k_1, k_2, k_3. Punkty A, B, C dzielą okrąg ω na łuki BC, CA, AB, które oznaczymy odpowiednio przez α, β, γ. Przyjmijmy, że γ jest najkrótszym z tych łuków; zatem $|\sphericalangle ACB| \leqslant 60°$.

Skoro A leży na zewnątrz okręgu k_2, a B na zewnątrz okręgu k_1, to $|AB| > |AM|$, $|AB| > |BM|$, więc $|\sphericalangle AMB| > 60°$. Zatem punkty M, C leżą na różnych łukach AB okręgu ω, czyli $M \in \gamma$.

Różne punkty $L, M \in k_1$ są jednakowo odległe od A, a łuk γ jest nie dłuższy od β, wobec czego $L \in \beta$. Analogicznie, $K \in \alpha$. Tak więc punkty A, M, B, K, C, L leżą na okręgu ω w takim właśnie porządku; przy tym A, B, C są środkami łuków LM, MK, KL. Zatem proste KA, LB, MC zawierają dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta KLM i przechodzą przez wspólny punkt I.

Wiadomo, że $|AI| = |AM|$ oraz $|BI| = |BM|$ (znana własność punktu przecięcia dwusiecznych). Wobec tego punkt I leży na okręgu k_1 oraz na okręgu k_2. Jest on różny od punktu M, więc pokrywa się z punktem Z, i analogicznie, pokrywa się z X oraz Y. Stąd teza: $X = Y = Z = I$.

512. Załóżmy, że liczby całkowite $x, y, n > 0$ spełniają podane równanie. Wówczas liczby dodatnie

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{x}{n}}, \quad \beta = \sqrt[3]{\frac{y}{n}}$$

spełniają równanie $\alpha + \beta = 1$. Ich sześciany są liczbami wymiernymi. Z tożsamości

$$3(\alpha+\beta)(\alpha^3 - \beta^3) = (\alpha - \beta) \cdot 3(\alpha+\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \\ = (\alpha - \beta)\big(2(\alpha+\beta)^3 + (\alpha^3 + \beta^3)\big)$$

wnosimy, że $\alpha - \beta$ jest liczbą wymierną, i w konsekwencji same liczby α, β są wymierne.

Zapisując liczbę α w postaci nieskracalnego ułamka $\alpha = k/m$ mamy równość $xm^3 = nk^3$, z której wynika, że n dzieli się przez m^3. Skoro zaś $x < n$, to $k < m$, więc liczba n jest podzielna przez sześcian liczby m, większej od 1.

Na odwrót, zakładając, że liczba n ma dzielnik postaci m^3 ($m > 1$), przyjmujemy

$$x = \frac{n}{m^3}, \qquad y = \frac{n(m-1)^3}{m^3}$$

i uzyskujemy wymaganą równość

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{n}.$$

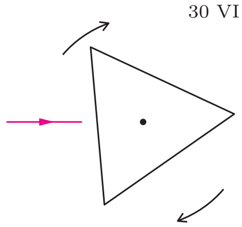
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2006

Zadania z fizyki nr 416, 417

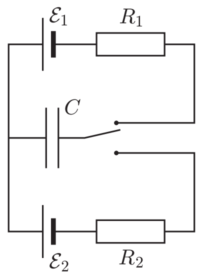
Redaguje Jerzy B. BROJAN

416. Ze szkła o współczynniku załamania 1,5 wykonano pryzmat o podstawie trójkąta równobocznego, skierowano na niego promień światła tak, że przedłużenie tego promienia przebiegało przez środek trójkąta i wprawiono pryzmat w ruch obrotowy (rys. 1). Podać zakres możliwych wartości kąta odchylenia promienia od kierunku początkowego (przedział lub przedziały). Pominąć częściowe odbicie światła towarzyszące załamaniu, natomiast uwzględnić ewentualne całkowite odbicie wewnętrzne.



Rys. 1

417. Przełącznik na rysunku 2 jest przerzucany z górnego do dolnego położenia i na odwrót, przy czym czasy zetknięcia z dolnym i górnym stykiem są jednakowe. Częstotliwość przerzucania (lub – co na jedno wychodzi – pojemność kondensatora) jest tak duża, że po pewnym czasie zmiany napięcia na kondensatorze przestają być zauważalne. Jaka jest wtedy wartość tego napięcia? Wielkości oznaczone na rysunku są dane.



Rys. 2

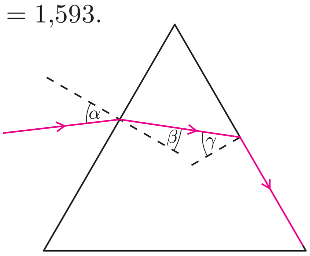
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/2005

Przypominamy treść zadań:

408. Przez pryzmat, którego przekrój ma kształt trójkąta równobocznego, biegnie promień światła, wybiegając z niego stycznie do ścianki. Ile wynosi współczynnik załamania szkła, jeśli kąt α wynosi 35°?

409. Ciężar o masie $m = 10$ kg wisi na dwóch cienkich i jednakowo obciążonych drutach o długości $l = 20$ m, które początkowo były pionowe i odległe od siebie o $d = 20$ cm. Przez druty przepuszczono prąd o jednakowym natężeniu i zwrocie. Przy jakim natężeniu prądu druty się zetkną? Dopuszczalne są przybliżenia odpowiednie dla podanych wartości liczbowych oraz obliczenia numeryczne.

408. Z równań
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n, \qquad \sin\gamma = \frac{1}{n}, \qquad \beta + \gamma = 60°,$$
można numerycznie wyznaczyć n – dla $\alpha = 35°$ otrzymujemy $n = 1{,}593$.



409. Niech kształt drutu po włączeniu prądu będzie opisany funkcją $y(x)$, gdzie y jest poziomym odchyleniem drutu na wysokości x $(0 < x < l)$. Kąt odchylenia drutu od pionu jest mały i równy w przybliżeniu $\alpha = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, a składowa pozioma siły napięcia drutu wynosi w tym samym przybliżeniu $Q_y = Q\alpha$, gdzie $Q = mg/2$. Zauważmy dalej, że przy podanych wartościach d i l można podzielić druty na odcinki o długości znacznie większej od d, a jednocześnie znacznie mniejszej od l. Ponieważ wygięcie drutów jest niewielkie, więc siłę wzajemnego oddziaływania tych odcinków można obliczyć korzystając ze wzoru dla przewodników równoległych i nieskończenie długich. Przyrównując różnicę między wartościami Q_y na początku i na końcu odcinka drutu o długości $\mathrm{d}x$ do siły oddziaływania magnetycznego $\mathrm{d}Fm$ otrzymujemy równanie
$$Q\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}Fm}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{d-2y},$$
gdzie minus po znaku równości wynika z faktu, że druga pochodna funkcji $y(x)$ jest ujemna, a czynnik 2 w wyrażeniu $d-2y$ – z symetrii problemu (przesunięcie każdego z drutów o y zmniejsza ich wzajemną odległość o $2y$). Pomnożenie obu stron przez $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ i scałkowanie daje nam równanie z pierwszą pochodną
$$Q\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{\mu_0}{2\pi}I^2\ln\frac{d-2y}{d-2y_{\max}},$$
gdzie $y_{\max}$ jest maksymalnym odchyleniem drutu (w połowie jego długości). Analizując zależność $y_{\max}$ od natężenia prądu I (lub na odwrót – I od $y_{\max}$) stwierdzamy, że początkowo ma ona charakter rosnący, a po przekroczeniu pewnej wartości $y_{\max}$ odpowiadającej maksymalnemu natężeniu prądu mamy do czynienia z funkcją malejącą. Nietrudno dojść do wniosku, że w tym drugim zakresie równowaga drutu ma charakter niestabilny. Do analizy numerycznej najlepiej wprowadzić bezwymiarowe zmienne
$$u = 2y/d \quad \text{i} \quad s = ax$$
(gdzie $a = \frac{2I}{d}\sqrt{\frac{\mu_0}{2\pi Q}}$), w których równanie przybiera postać
$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2 = \ln\frac{1-u}{1-u_{\max}}.$$
Zadajemy pewną wartość $u_{\max}$ mniejszą od 1, wybieramy znak $\mathrm{d}u/\mathrm{d}s > 0$ i całkujemy numerycznie powyższe równanie od punktu $s = 0$, $u = 0$ do punktu, w którym $s = s_m$, $u = u_{\max}$. Porównując wyniki otrzymane dla różnych $u_{\max}$ stwierdzamy, że maksymalna wartość s_m jest osiągana dla
$$u_{\max} = 0{,}57 \div 0{,}58$$
i wynosi $s_m = 1{,}082$. Po przyrównaniu s_m do $al/2$ i podstawieniu a wyznaczamy maksymalne natężenie prądu, przy którym nie nastąpi zetknięcie drutów:
$$I_{\max} = 1{,}082\frac{d}{l}\sqrt{\frac{2\pi Q}{\mu_0}} = 169\ \text{A}.$$