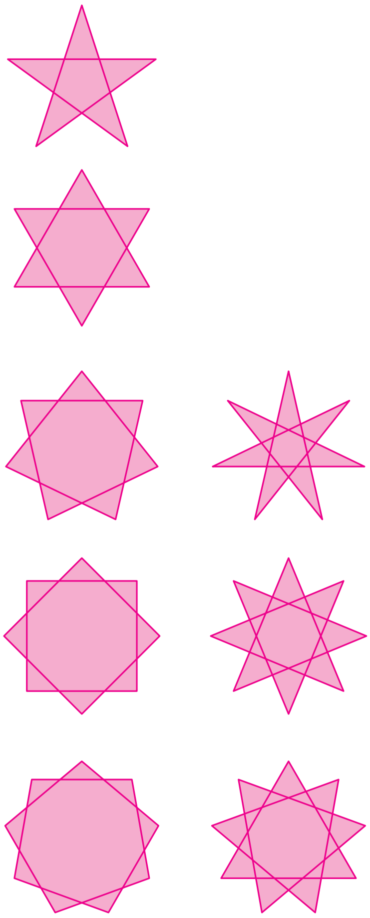
Ile jest wielościanów foremnych?

Zdzisław POGODA *

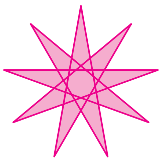
Pytanie postawione w tytule wydaje się dziwne. Przecież wiadomo co najmniej od czasów Platona, że wielościanów foremnych jest pięć typów: czworościan foremny, sześcian oraz ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan – wszystkie foremne. Łatwo też pokazuje się, że nie może być ich więcej. W czym zatem problem?

Definiując i opisując wielościany foremne, zazwyczaj zakładamy milcząco, że są one wypukłe. A co będzie, gdy zrezygnujemy z wypukłości? Podobnie możemy zrezygnować z wypukłości ścian. Czy w takiej ogólniejszej sytuacji będziemy mogli mówić o wielościanach foremnych? Ile ich wtedy będzie?



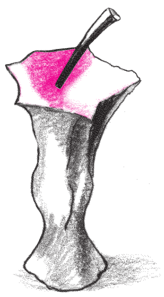
Najpierw ustalmy pewne definicje. Zapewne pamiętamy, że wielokąt foremny to jest taki wielokąt wypukły, który ma wszystkie boki równe i kąty wewnętrzne przy wierzchołkach takie same, czyli przystające. Opuszczając słowo „wypukły" i nie zwracając uwagi na przecięcia boków, dostajemy określenie wielokąta foremnego gwiaździstego. Takie wielokąty powstają z przekątnych zwykłych wielokątów wypukłych. Najprostszy tworzą przekątne wypukłego pięciokąta foremnego – jest to pięciokąt gwiaździsty, czyli znany Pitagorejczykom pentagram. Przekątne sześciokąta nie zamykają się w wielokąt gwiaździsty – tu dostajemy kompozycje dwóch trójkątów równobocznych nazywaną często gwiazdą Dawida. Za to w siedmiokącie foremnym mamy aż dwa siedmiokąty gwiaździste.

Jeśli wielokąt foremny (gwiaździsty lub nie) ma n boków, a punkt O oznacza jego środek (czyli np. środek okręgu opisanego na tym wielokącie), to punkt poruszający się po bokach wielokąta obiegnie środek d razy. Gdy wielokąt jest wypukły, to $d = 1$, dla pentagramu $d = 2$. Kąt środkowy, czyli kąt o wierzchołku O, którego ramiona przechodzą przez końce jednego boku, ma miarę $\frac{2\pi d}{n}$. Liczbę d często nazywa się gęstością wielokąta foremnego. Liczby d i n są względnie pierwsze oraz $2d < n$. Wielokąt o n bokach i gęstości d oznacza się symbolem $\{\frac{n}{d}\}$ – jest to symbol Schläfliego wielokąta foremnego.



Rys. 1. Wielokąty gwiaździste.

Można spróbować również rozszerzyć definicję wielościanu foremnego, rezygnując z wypukłości i dopuszczając ściany gwiaździste. Wielościan nazwiemy foremnym, gdy jego ściany są przystającymi wielokątami foremnymi, również gwiaździstymi, a w każdym wierzchołku schodzi się jednakowa liczba ścian. W takim przypadku, podobnie jak dla wielokątów gwiaździstych, ściany będą mogły się przenikać. Warto może zaznaczyć, że termin „ściana" jest tu już nieco umowny.



Wygodnie jest też zdefiniować wielościan foremny, używając pojęcia figury (wielokąta) wierzchołkowej. Figura wierzchołkowa jest wielokątem, którego wierzchołki są środkami krawędzi schodzących się w danym wierzchołku wielościanu. Dla sześcianu, na przykład, figurą wierzchołkową jest trójkąt, a dla dwudziestościanu pięciokąt.

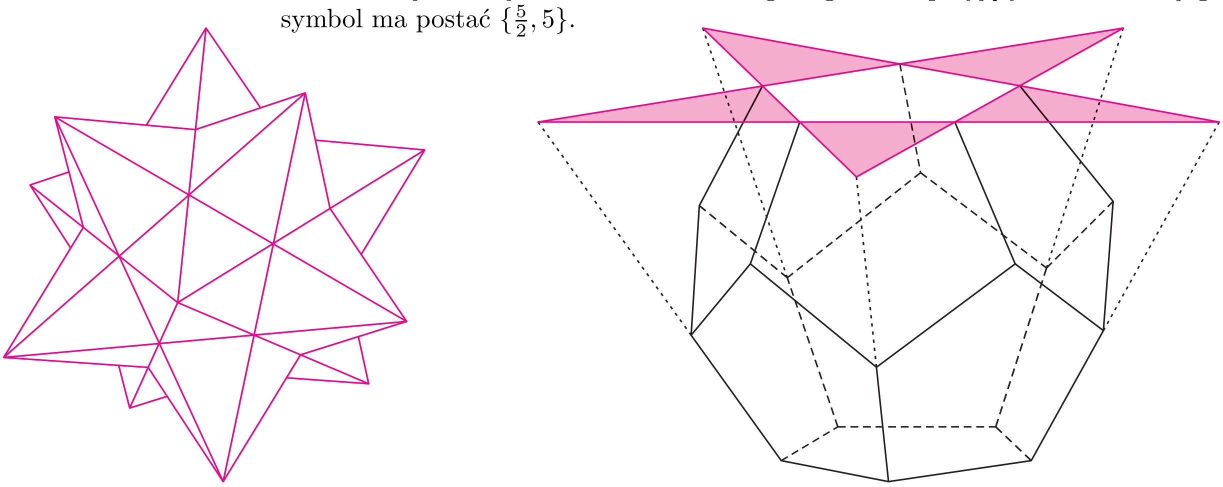
Łatwo sprawdzamy, że wielościan jest foremny, gdy wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i podobny warunek spełniają figury wierzchołkowe. Dla wielościanów foremnych wprowadzamy również symbol Schläfliego $\{p, q\}$, gdzie $\{p\}$ jest symbolem ściany, a $\{q\}$ symbolem figury wierzchołkowej. Liczba q, gdy jest całkowita, jest także liczbą krawędzi lub, co na jedno wychodzi, ścian schodzących się w wierzchołku wielościanu. Tak więc, np. $\{5, 3\}$ oznacza wielościan, którego ścianami są pięciokąty, a figurami wierzchołkowymi trójkąty, czyli w każdym wierzchołku tego wielościanu mamy trzy krawędzie. Jest to naturalnie dwunastościan foremny.

Jakie pary liczb $\{p, q\}$ można przypisać wielościanom foremnym? Klasyczne twierdzenie mówi, że dla wielościanów wypukłych dopuszczalne są następujące symbole $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 3\}$, $\{3, 5\}$ i $\{5, 3\}$. Z każdym związany jest pewien

*Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

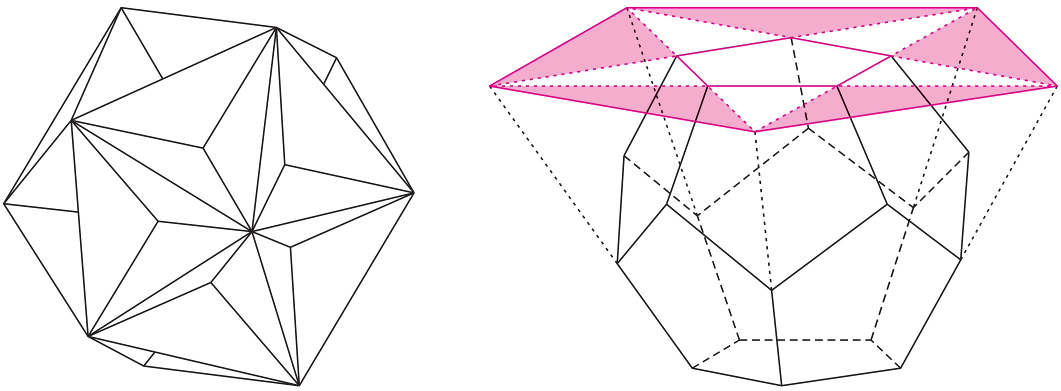
wielościan foremny. Jaki? Czytelnik z pewnością sam zgadnie. Czy liczby p i q mogą przyjmować wartości ułamkowe? Kepler na początku XVII, a Poinsot na początku XIX wieku skonstruowali takie przykłady.

Jeśli w pięciokącie foremnym przedłużymy krawędzie aż do przecięcia, to otrzymamy pięciokąt gwiaździsty. Możemy tak postąpić z każdym pięciokątem – ścianą dwunastościanu foremnego. Otrzymamy wtedy obiekt nazywany dwunastościanem gwiaździstym małym. Jego ścianami są pentagramy i w każdym wierzchołku schodzi się ich pięć, a zatem spełnione są warunki rozszerzonej definicji wielościanu foremnego. Zgodnie z przyjętymi zasadami jego symbol ma postać $\{\frac{5}{2}, 5\}$.



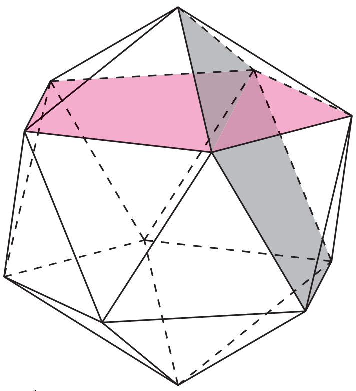
Rys. 2. Dwunastościan gwiaździsty mały i idea konstrukcji.

Istnienie wielościanu o symbolu $\{5, \frac{5}{2}\}$ udowodnił Poinsot. Wystarczy w każdym pentagramie dwunastościanu gwiaździstego małego połączyć wierzchołki, tworząc ponownie wypukłe pięciokąty foremne. Powstały wielościan jest figurą niezwykłą, gdyż zbudowany jest, podobnie jak dwunastościan foremny, z dwunastu pięciokątów, a jego figurą wierzchołkową jest pentagram. Nazwano go dwunastościanem wielkim.



Rys. 3. Dwunastościan wielki i idea konstrukcji.

Jeśli w dwudziestościanie foremnym poprowadzimy płaszczyzny tak, że będą zawierały podstawy ostrosłupów pięciokątnych, to utworzą one właśnie dwunastościan wielki.

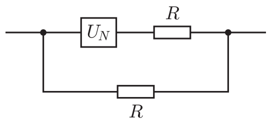


Rys. 4

Czy można wskazać jeszcze jakieś inne niewypukłe wielościany foremne? Kepler i Poinsot skonstruowali jeszcze po jednym, a Poinsot zastanawiał się, czy to już wszystkie możliwości. No właśnie, jak sprawdzić, czy przypadkiem czegoś nie przeoczono? O ile dla wielościanów wypukłych łatwo przekonujemy się, że więcej możliwości być nie może (wystarczy sprawdzić, ile wielokątów foremnych i jakie mogą się schodzić w jednym wierzchołku), o tyle, gdy rezygnujemy z wypukłości, sprawa staje się dużo trudniejsza.

Z pomocą przychodzą wiadomości dotyczące izomerii własnych figur (symetrii figur) i ich grup. Przypomnijmy, że izometrią własną albo symetrią figury nazywamy taką izometrię, która przekształca figurę na siebie. Może to być

Rozwiązanie zadania F 665.
Zauważmy, że układ $N+1$ powstaje z N przez dołączenie oporników jak na rysunku.



Wobec tego

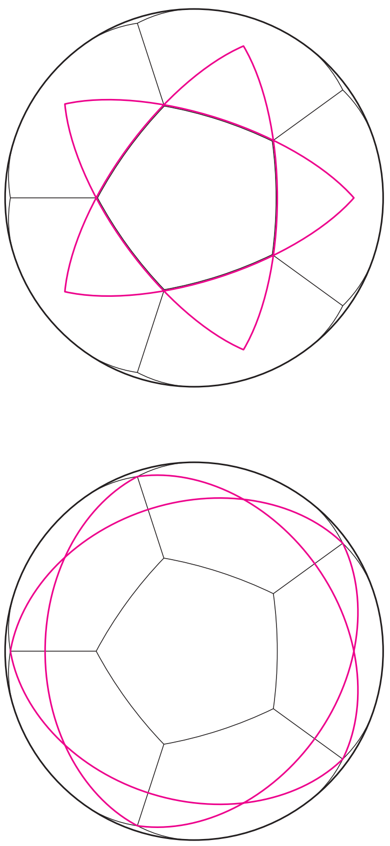
$$R_{N+1} = \left(\frac{1}{R+R_N} + \frac{1}{R}\right)^{-1} = \\ = \frac{(R_N+R)R}{R_N+2R}.$$

Granica tak określonego ciągu jest dodatnia i musi spełniać równanie

$$R_\infty = \frac{(R_\infty+R)R}{R_\infty+2R}.$$

Dodatnim pierwiastkiem tego równania jest

$$R_\infty = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R.$$



Rys. 5.

obrót, symetria osiowa, symetria płaszczyznowa (odbicie), a także przekształcenie identycznościowe. Nietrudno się przekonać, że symetrie figury tworzą grupę: złożenie dwóch symetrii jest symetrią i odwrotna do symetrii figury też jest jej symetrią. Na przykład: czworościan foremny ma 24 symetrie – każdej jednoznacznie odpowiada jakaś permutacja wierzchołków.

Dla nas będzie interesujące pewne ważne twierdzenie dotyczące, między innymi, obrotów własnych wielościanów foremnych. Zanim je sformułujemy, przypomnijmy, że każdy obrót na płaszczyźnie wykonujemy wokół pewnego punktu – środka obrotu, a obrót w przestrzeni dokoła pewnej prostej – osi. Jeśli obrót o kąt $360^\circ/n$ jest obrotem własnym figury, to mówimy, że figura ma n-krotny środek obrotu lub n-krotną oś obrotu w zależności od typu obrotu. Na przykład: pięciokąt foremny ma pięciokrotny środek obrotu, a czworościan foremny ma trzykrotne osie obrotu, ale ma też dwukrotne osie obrotu (czyli osie symetrii) przechodzące przez środki krawędzi skośnych.

Sygnalizowane twierdzenie mówi, że *jeśli grupa obrotów w przestrzeni jest skończona i zawiera co najmniej dwa obroty różne od obrotów o* 180° *i o różnych osiach, to jest identyczna (izomorficzna) z jedną z trzech następujących grup: grupą obrotów czworościanu foremnego, grupą obrotów sześcianu (i tym samym ośmiościanu foremnego) oraz grupą obrotów dwunastościanu foremnego (identyczną z grupą obrotów dwudziestościanu foremnego).* Niestety, nie ma tu miejsca na dowód tego ważnego faktu. Czytelnik zainteresowany dowodem może go znaleźć, na przykład, w klasycznej książce Hermana Weyla „Symetria”.

Zobaczmy, jak to twierdzenie pozwala wyznaczyć niewypukłe wielościany foremne. Każdy z wielościanów foremnych o symbolu $\{p,q\}$ musi mieć jedną z trzech wymienionych w twierdzeniu grup obrotów własnych. Wygodnie jest zrzutować powierzchnię wielościanu na powierzchni sfery stycznej do wszystkich ścian wielościanu (sfery wpisanej) – rzut wykonujemy ze środka sfery. Dzięki temu wystarczy studiować odpowiednie mozaiki na sferze i ich obroty. Zauważmy jeszcze, że w grupie symetrii podziału sfery odpowiadającemu wielościanowi $\{p,q\}$ mamy obroty o n_p-krotnych środkach pokrywających się ze środkami ścian oraz n_q-krotne obroty o środkach w wierzchołkach. Liczby n_p i n_q są ewentualnie licznikami liczb p i q, gdy są one ułamkami.

Z cytowanego twierdzenia natychmiast wynika, że jeśli szukamy wielościanu foremnego różnego od znanych brył platońskich o symbolu $\{p,q\}$, to jego grupa symetrii musi być grupą obrotów dwunastościanu foremnego, która jako jedyna ma pięciokrotne osie obrotu, co gwarantuje pięciokrotne środki obrotu dla odpowiadającego podziału sfery. Zatem wielościany foremne niewypukłe mogą mieć tylko symbole $\{\frac{5}{2},k\}$ względnie $\{k,\frac{5}{2}\}$, gdzie k może przyjąć wyłącznie jedną z trzech wartości: 3, 5 albo $\frac{5}{2}$.

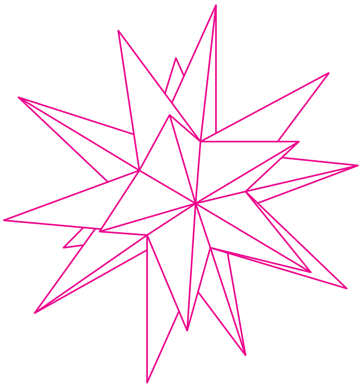
Ostatnią wartość da się wyeliminować. Przyjrzyjmy się temu bliżej. Porównamy podział sfery dla hipotetycznego wielościanu $\{\frac{5}{2},k\}$ z podziałem dla dwunastościanu foremnego.

Niech na sferze będzie dany podział typu $\{5,3\}$. Wybierzmy jedną ze ścian wraz ze sferycznym pięciokątem gwiaździstym $\{\frac{5}{2}\}$ umieszczonym tak, żeby grupa obrotów dwunastościanu była dla niego grupą symetrii. Ten pięciokąt może być umieszczony tylko na dwa sposoby, żeby nie burzyć symetrii i żeby można było dołożyć kolejne pięciokąty gwiaździste związane z potencjalnym wielościanem $\{\frac{5}{2},k\}$:

- wierzchołki pięciokąta gwiaździstego są środkami ścian przyległych do wyróżnionej;

- wierzchołki pięciokąta gwiaździstego są wierzchołkami ścian również przyległych do tej wybranej

Znów powołując się na zachowanie symetrii, zauważamy, że w pierwszym przypadku możemy otrzymać podział typu $\{\frac{5}{2},5\}$, bo w środku zejdzie się pięć pentagramów. Natomiast w drugim przypadku w wierzchołku zejdą się tylko trzy pentagramy, czyli podział odpowiada $\{\frac{5}{2}, 3\}$. Dzięki dwoistości możliwe są jeszcze tylko podziały: $\{5, \frac{5}{2}\}$, $\{3, \frac{5}{2}\}$.

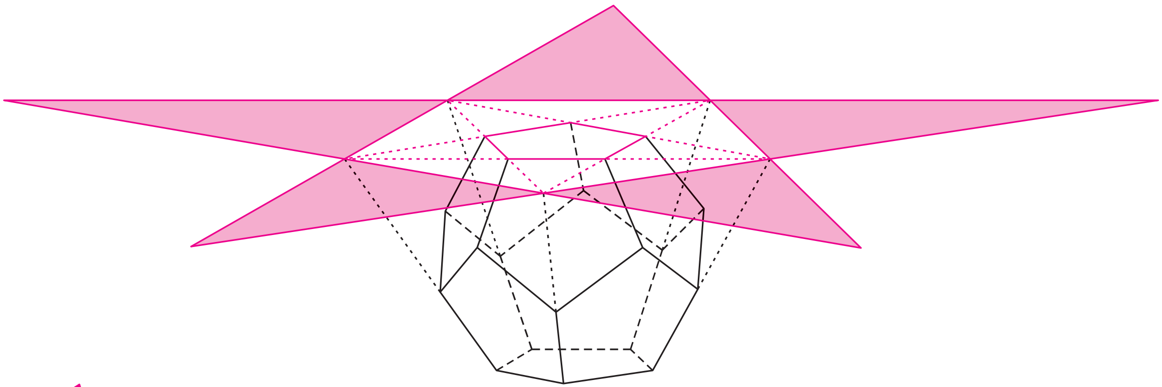


Rys. 6a

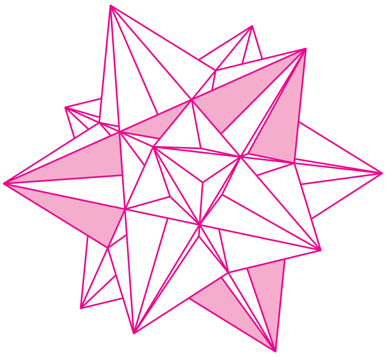
Ostatecznie więc, możliwe są co najwyżej cztery niewypukłe wielościany foremne, czyli Kepler i Poinsot znaleźli wszystkie dopuszczalne obiekty.

Pierwszym, który udowodnił, że wielościanów foremnych niewypukłych jest cztery, był Augustyn Cauchy. Posłużył się on również własnościami rzutu powierzchni wielościanu na sferę i wykorzystał pewne pomysły Poinsota. Nie znał on naturalnie twierdzenia o klasyfikacji grup obrotów w przestrzeni.

Na koniec opiszemy krótko, jak można skonstruować dwunastościan gwiaździsty wielki i dwudziestościan wielki. Pierwszy z nich otrzymamy z dwunastościanu wielkiego przez przedłużanie krawędzi – boków pięciokątów. Jak już wiemy, przedłużając boki pięciokąta foremnego, otrzymamy pentagram. W omawianym przypadku trzy pentagramy zejdą się w jednym wierzchołku, tworząc dwunastościan gwiaździsty wielki.

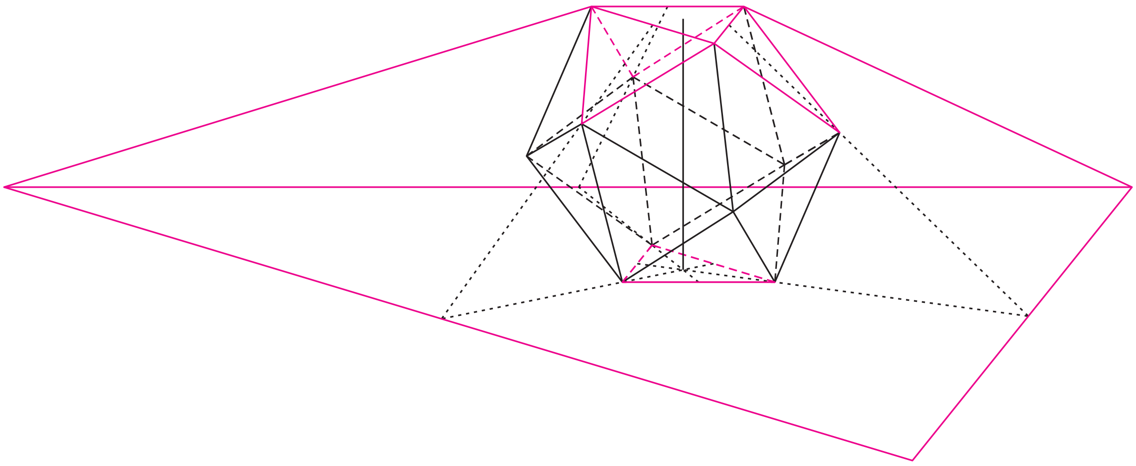


Rys. 6b



Rys. 7a

Konstrukcja dwudziestościanu wielkiego jest bardziej skomplikowana. Umieśćmy dwudziestościan formeny na płaszczyźnie tak, żeby jedna z jego ścian leżała na tej płaszczyźnie. Przyjrzyjmy się teraz ścianie przeciwległej. Przez przyległe do niej trójkąty poprowadźmy płaszczyzny. Wyznaczą one na pierwszej płaszczyźnie trójkąt równoboczny – jest to ściana dwudziestościanu wielkiego. Powtarzając procedurę dla każdej ze ścian dwudziestościanu foremnego, otrzymamy dwudziestościan wielki – foremny wielościan niewypukły zbudowany również z dwudziestu trójkątów równobocznych. Jego symbol Schläfliego to właśnie $\{3, \frac{5}{2}\}$.



Rys. 7b

Czytelnicy pragnący wykonać modele omawianych wielościanów znajdą ich opis w książce Cundy, Rollet *Modele matematyczne*.

Podobnie możemy zapytać o niewypukłe wielościany archimedesowe. Tu sprawa jest jeszcze bardziej skomplikowana i ostateczny wynik uzyskano dopiero w latach siedemdziesiątych XX wieku.