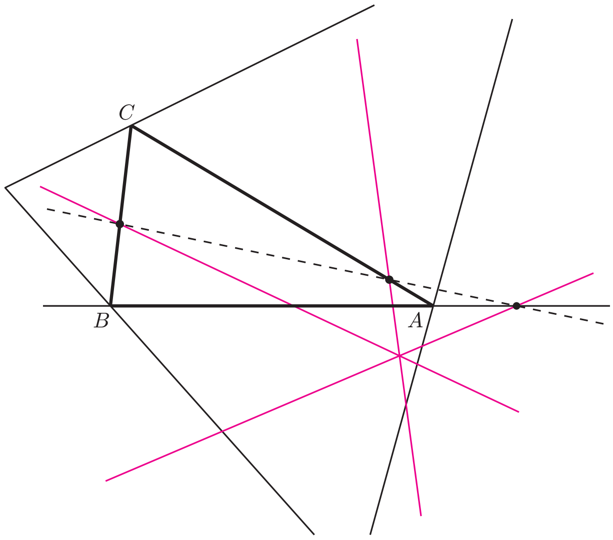
Możliwości eksploatacji tematu jest naprawdę wiele. Pokazana dualność między prostymi Eulera i Nagela pozwala przeformułować pewne twierdzenia o prostej Eulera na dualne twierdzenia dotyczące prostej Nagela (takim jest np. warunek konieczny na równoległość prostej Eulera do pewnego boku trójkąta). Można też szukać następnych szczególnych punktów trójkąta i badać ich obrazy, analogicznie można postępować z prostymi. Na uwagę zasługuje encyklopedia Clarka Kimberlinga (`http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia`), w której opisane zostało 3055 szczególnych punktów trójkąta! Na stronach MathWorld (`http://mathworld.wolfram.com/CentralLine.html`) można znaleźć kilkanaście charakterystycznych prostych trójkąta. Materiał badawczy jest praktycznie niewyczerpywalny.



Rys. 7

Drobiazgi

Astronomicznym odpowiednikiem słynnego problemu kury i jajka jest np. zagadnienie, czy uformowane wcześniej galaktyki zebrały się w gromady galaktyk, czy też ogromne obłoki rozproszonej materii podzieliły się na fragmenty, z których dopiero powstały galaktyki. W świecie gwiazd sprawa wydaje się rozstrzygnięta: obłoki materii w miarę zgęszczania się ogrzewają się, co razem sprzyja rozpadowi na mniejsze fragmenty, a z nich w końcu powstają gwiazdy. Na zdrowy rozum, mechanizm ten mógłby działać też w większej skali. Jednak obserwacje najbliższej gromady galaktyk, gromady w Pannie (Virgo), sugerują coś przeciwnego. Gromada ma mianowicie dwie koncentracje, z których każda w centrum mieści wielką galaktykę eliptyczną. Koncentracje te najwyraźniej spadają na siebie – dowodzi tego rozkład przestrzenny galaktyk i ich prędkości radialne. Wreszcie galaktyki różnych typów są w tych podgromadach nie wymieszane: galaktyki eliptyczne (masywne) grupują się w pobliżu centrów, a spiralne (lżejsze) na peryferiach podgromad (nazywa się to efektem segregacji galaktyk, a występuje on w licznych gromadach). Ten fakt akurat można tłumaczyć dwojako. Może on oznaczać, że gromady nie osiągnęły jeszcze stanu równowagi, albo że właśnie są stare w skali kosmicznej, gdyż pojawianie się efektu segregacji z upływem czasu potwierdzają numeryczne symulacje mechanicznej ewolucji gromad. Badania ewolucji gromad stawiają dopiero pierwsze kroki.

⋆ ⋆ ⋆

Średnią odległość $\langle r\rangle$ planety od Słońca można obliczyć np. jako średnią (niech już będzie: arytmetyczną) wielu pomiarów r wykonanych w jednakowych odstępach czasu t w ciągu pełnego obiegu planety. Ale można też uśrednić pomiary r wykonane w jednakowych odstępach kąta v między kierunkiem r a kierunkiem na peryhelium (kąt ten nazywa się anomalią prawdziwą). A jeżeli obliczyć średnią arytmetyczną po prostu najmniejszej i największej odległości planety od Słońca, to co wyjdzie? A ile wynosi średnia geometryczna tych dwóch odległości? A ich średnia harmoniczna? Wszystkie te średnie są różne. Oto one (a oznacza wielką półoś elipsy, e jej mimośród):

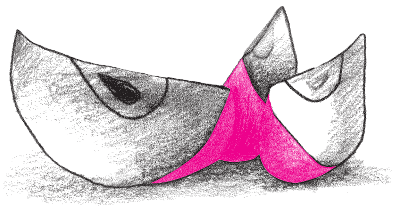
$$\langle r\rangle_t = a(1+e^2/2), \qquad \langle r\rangle_v = a\sqrt{1-e^2} = b,$$

$$(r_{\min}+r_{\max})/2 = a, \qquad \sqrt{r_{\min}r_{\max}} = b,$$

$$\left(\frac{1}{r_{\min}}+\frac{1}{r_{\max}}\right)^{-1} = a(1-e^2)/2.$$

Można skonstruować kąt (zwany anomalią mimośrodową), względem którego uśrednione r wynosi a.

T. K.



Rozwiązanie zadania F 666.
Niech r_{kl} oznacza opór mierzony między punktami k i l. W układzie 1 między 1 i 2 mamy połączenie równoległe opornika R_3 z połączeniem szeregowym R_1 i R_2, czyli

$$r_{12} = \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_1+R_2}\right)^{-1} = \frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3}$$

oraz

$$r_{13} = \frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3}$$

i

$$r_{23} = \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}.$$

W układzie 2 między tymi samymi punktami jest tylko połączenie szeregowe R'_1 i R'_2, czyli $r_{12} = R'_1 + R'_2$, analogicznie r_{13} i r_{23}. Łącząc otrzymane wzory, dostajemy

$$R'_1 = \frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3},$$

$$R'_2 = \frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3}$$

i

$$R'_3 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3}.$$