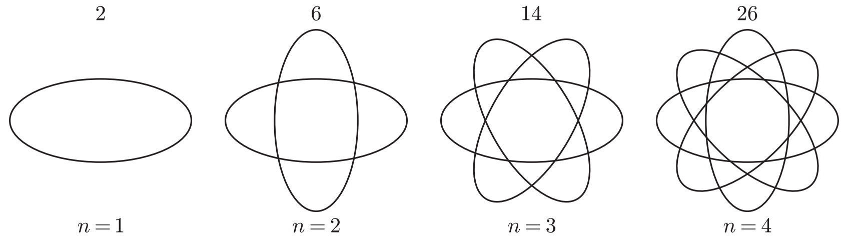
komplikuje się do tego stopnia, że to podejście staje się niepraktyczne. Wtedy można już tylko wykorzystać specjalne właściwości badanego kształtu lub wymodelować przypadki początkowe komputerowo.

Zadanie. Na ile maksymalnie kawałków może podzielić płaszczyznę 256 elips?

Odpowiedzią jest wartość $W(256)$, przy czym $W(n)$ jest wielomianem charakterystycznym dla elipsy. Sprawdźmy wartości początkowe.



Wiemy, że $W(n)$ jest wielomianem stopnia 2. Podstawiając dowolną trójkę wartości n i $W(n)$ z rysunku, otrzymujemy układ równań linowych. Po rozwiązaniu, $W(n) = 2n^2 - 2n + 2$. Odpowiedź: $W(256) = 130\,562$.

Skracanie w uogólnieniach

Krzysztof OLEŚ[*]

Spróbujmy uogólnić dodawanie i odejmowanie. Te operacje dobrze znamy (dopiero po pewnym czasie słyszymy, że działanie to funkcja, funkcja to relacja, relacja to zbiór – i popadamy w wątpliwości), możemy więc pokusić się o pewien eksperyment: spróbujmy dodawać i odejmować zbiory. Przed oczyma stają diagramy Venna i wszystko wydaje się oczywiste. My jednak pójdziemy w stronę arytmetyki.

Przypomnijmy, że $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$, oraz dla $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ możemy zdefiniować dodawanie i odejmowanie „po współrzędnych”, mianowicie $x \pm y = (x_1 \pm y_1, \ldots, x_n \pm y_n)$. Ponadto, analogiczne x możemy przemnożyć przez $\lambda \in \mathbb{R}$ w następujący sposób: $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. Po tej nużącej retrospekcji pojawiają się działania. Dla $A,\ B \subseteq \mathbb{R}^n$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}. \tag{1}$$

Kiedy dodamy (nomen omen), że dla odejmowania sytuacja jest podobna, to całość staje się jasna. Czy aby na pewno?
Pojawiają się pytania dwojakiego rodzaju. Geometryczne, np. co otrzymamy sumując koło i jego brzeg? Arytmetyczne, np. czy prawdą jest, że $A + A = 2A$?

W naszych rozważaniach zajmiemy się jednym z pytań arytmetycznych – sformułujemy je w postaci twierdzenia.

Twierdzenie 1. *Niech A będzie niepustym i ograniczonym zbiorem w $\mathbb{R}^n$, niech ponadto B i C będą domkniętymi i wypukłymi zbiorami w $\mathbb{R}^n$. Jeśli $A + B = A + C$, to $B = C$.*

Jan Tadeusz Stanisławski powiedziałby w tym momencie: i to by było na tyle. Ostatnia linijka twierdzenia to przecież takie zwykłe skracanie (chciałoby się nawet coś obustronnie poskreślać). Zasnąć spokojnie nie pozwalają jednak założenia. Z pewną taką nieśmiałością – zacznijmy bez nich. Niech D oznacza koło (na płaszczyźnie) o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 1, a E jego brzeg. Łatwo zauważyć (osławione hasło-wytrych sygnalizujące zadanie dla Czytelnika), że $D + D$ jest kołem o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 2, oraz że tym samym kołem jest $D + E$, natomiast $D \neq E$. Nie możemy bezkarnie skracać!

[*]Instytut Matematyczny Uniwersytetu Śląskiego

Wracamy zatem do założeń. Potrzebna nam będzie odległość w $\mathbb{R}^n$. Niech $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Odległością tych dwóch punktów nazywamy liczbę

$$\mathrm{d}(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Zauważmy, że definicja ta uogólnia znane – dla $n = 1, 2, 3$ – odległości. Analogie są znaczne, np. kulą w $\mathbb{R}^n$ o środku w punkcie x i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór $\{y \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(x, y) \leqslant r\}$.

Po co nam kule? Otóż, zbiór jest ograniczony, jeśli można go umieścić w pewnej kuli.

Czas na domkniętość. Otóż, zbiór domknięty w $\mathbb{R}^n$ ma tę własność, że granica ciągu jego elementów należy do tego zbioru. Przykładem zbioru, który nie jest domknięty w $\mathbb{R}$ jest odcinek $\langle 0; 1)$. Wystarczy rozważyć przykładowy ciąg $a_m = 1 - \frac{1}{m}$ i jego granicę $a = 1$. W tym miejscu małe wyjaśnienie dla przypadków, w których $n \neq 1$. Jeśli (a_m) jest ciągiem elementów $\mathbb{R}^n$, to a jest jego granicą, wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg liczbowy $\big(\mathrm{d}(a_m, a)\big)$ jest zbieżny do zera.

I na koniec definicyjnego gderania jeszcze jedno przypomnienie: wypukłość. Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy wypukłym, jeśli zachodzi warunek

$$\forall_{x,y \in A} \quad \forall_{\lambda \in [0;1]} \quad \lambda x + (1 - \lambda) y \in A \tag{2}$$

(jest to parametryczny opis odcinka).

Dodam, iż pojęcia „domkniętości” – w trochę innej wersji – i „wypukłości” wraz z konsekwencjami w *Delcie* już się pojawiły, m. in. [2].

Jesteśmy gotowi na danie główne. Podane twierdzenie jest prostą konsekwencją następującej obserwacji (była ona np. zadaniem na Międzynarodowym Konkursie Matematycznym im. Vojtěcha Jarníka w Ostrawie w roku 2001).

Twierdzenie 2. *Niech A będzie niepustym i ograniczonym zbiorem w $\mathbb{R}^n$, niech ponadto C będzie domkniętym i wypukłym zbiorem w $\mathbb{R}^n$. Dla dowolnego $B \subseteq \mathbb{R}^n$ zachodzi warunek*

$$A + B \subseteq A + C \Rightarrow B \subseteq C.$$

Dowód. Ustalmy $a_0 \in A$. Jeśli $b \in B$, to $a_0 + b \in A + B \subseteq A + C$, a zatem, na mocy (1), istnieją $a_1 \in A$ oraz $c_1 \in C$, takie, że $a_0 + b = a_1 + c_1$. Analogicznie, dla $a_1, \ldots, a_{m-1} \in A$ istnieją $a_2, \ldots, a_m \in A$ oraz $c_2, \ldots, c_m \in C$, takie,że: $a_1 + b = a_2 + c_2$, $a_2 + b = a_3 + c_3$, $\ldots$, $a_{m-1} + b = a_m + c_m$. Dodając te równania stronami i skracając, otrzymujemy $a_0 + mb = a_m + c_1 + c_2 + \cdots + c_m$. Niech teraz

$$x_m = \frac{1}{m}(c_1 + c_2 + \cdots + c_m).$$

Zauważmy, że na mocy wypukłości C i (rozwiniętego indukcyjnie) warunku (2) mamy $x_m \in C$.

Dowód kończą rachunki związane z odległością, mianowicie – po obliczeniach „na współrzędnych” – otrzymujemy

$$\mathrm{d}(b, x_m) = \frac{1}{m}\mathrm{d}(mb, mx_m) = \frac{1}{m}\mathrm{d}(a_m, a_0).$$

Ze względu na ograniczoność zbioru A (a więc wspólną ograniczoność liczb $\mathrm{d}(a_m, a_0)$) możemy wnioskować, że dla $m \to \infty$ mamy $\mathrm{d}(b, x_m) \to 0$, a zatem $b = \lim_{m\to\infty} x_m$. Z założonej domkniętości C wynika, że $b \in C$ i ... koniec dowodu.

Na zakończenie pytanie do Czytelnika. Podaliśmy przykład uzasadniający założenie wypukłości. A co z domkniętością i ograniczeniem? Nie wystarcza przecież wykorzystanie ich w przytoczonym dowodzie... Zainteresowanych odsyłamy na stronę 16.

Bibliografia

[1] R. Engelking, K. Sieklucki, *Geometria i topologia*, PWN 1980

[2] K. Oleś, *Twierdzenie bez założeń?*, Delta 3(346), 2003

[3] R. Webster, *Convexity*, Oxford University Press 1994