Przywrócić normalność

Rafał SZTENCEL *

Prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B (o dodatnim prawdopodobieństwie) nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Znane są liczne przykłady prostych zadań, w których obliczenie prawdopodobieństwa warunkowego daje zaskakujący wynik (patrz np. [2]). Punktem wyjścia będzie umiarkowany pod tym względem

Przykład 1. Losujemy jedną rodzinę spośród rodzin z dwojgiem dzieci. Jaka jest szansa, że wybierzemy rodzinę z dwoma chłopcami, jeśli wiemy, że w tej rodzinie jest co najmniej jeden chłopiec?

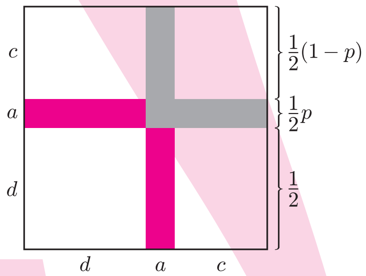
Rozwiązanie. Przyjmiemy, że zbiór zdarzeń elementarnych Ω składa się z czterech jednakowo prawdopodobnych par: $\{(c,c),(c,d),(d,c),(d,d)\}$, gdzie pierwszy element pary oznacza młodsze dziecko, a drugi – starsze. Obliczamy

$$P(\{(c,c)\}|\{(c,c),(d,c),(c,d)\}) = 1/3.$$

Teraz nieco bardziej zaskakujący

Przykład 2. Dowiedzieliśmy się, że w rodzinie z przykładu 1 jest chłopiec, który ma na drugie imię Antoni. Czy szansa, że w rodzinie jest dwóch chłopców, nadal wynosi 1/3?

Ostatecznie chłopiec musi mieć jakieś imię – czy zatem dowiedzieliśmy się czegoś istotnie nowego, co mogłoby zmienić szanse badanego zdarzenia? Zobaczmy. Mamy teraz trzy kategorie dzieci (c, a, d) i dziewięć zdarzeń elementarnych. Antoni to rzadkie imię – chłopiec ma szansę p, że je otrzyma. Wbrew utartym zwyczajom niech Ω będzie kwadratem jednostkowym – będziemy obliczać pola figur.



Szukane prawdopodobieństwo to stosunek pola części krzyża pomalowanej na szaro do pola całego krzyża:

$$\frac{\frac{1}{2}p - \frac{1}{4}p^2}{p - \frac{1}{4}p^2} = \frac{2-p}{4-p}.$$

Ciężko w to uwierzyć; błędu rachunkowego chyba nie ma. Dla $p = 1$ (każdy chłopiec to Antoni) uzyskujemy odpowiedź z przykładu 1. Ale i tak coś jest zasadniczo nie w porządku.

Zadanie to ukazało się w książce [1], napisanej przez psychologa, badającego reakcje ludzi na takie dziwne zadania. Zostało ubrane w tekst o osiedlu, na którym mieszkają wyłącznie rodziny z dwojgiem dzieci. Widząc ojca z synem na spacerze, dowiadujemy się, że syn ma na imię Antoni, etc.

Sprecyzujmy zatem warunki doświadczenia. Niech dzieci będą wyprowadzane na spacer w wyniku sprawiedliwego (inaczej rodzice ryzykują awanturę) losowania. Zbiór zdarzeń elementarnych będzie musiał zostać wzbogacony – oto typowe zdarzenie elementarne: $(a, a; 1)$, co czytamy: młodszy Antoni, starszy Antoni, na spacerze młodszy.

Teraz okazuje się, że już jest normalnie: jeśli na spacerze jest Antoni, to szansa, że w domu została dziewczynka, wynosi $\frac{1}{2}$, chłopiec (nie Antoni) – $\frac{1}{2}(1-p)$, wreszcie Antoni – $\frac{1}{2}p$, zgodnie z częstościami występowania wymienionych kategorii dzieci. Tak powinno być, ponieważ dokonujemy tu losowania dwuetapowego – najpierw rodziny, potem dziecka.

Powyższe wyniki można uzyskać, wypisując pracowicie zdarzenia elementarne, nic dziwnego więc, że wolimy wzór Bayesa.

Niech na przykład H_k, $k = 0, 1, 2$ oznacza zdarzenie „w rodzinie jest k dzieci o drugim imieniu Antoni", A zaś – „Antoni jest na spacerze". Obliczamy

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)} = \frac{1 \cdot P(H_2)}{0 \cdot P(H_0) + \frac{1}{2} \cdot P(H_1) + 1 \cdot P(H_2)} = \frac{2P(H_2)}{P(H_1) + 2P(H_2)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}p^2}{p(1-\frac{1}{2}p) + 2 \cdot \frac{1}{4}p^2} = \frac{1}{2}p.$$

Wobec tego w jakich warunkach można się spodziewać wyniku $\frac{2-p}{4-p}$? Może w takich: w urzędzie gminy jest kartoteka z danymi o rodzinach z dwójką dzieci. Znajomy urzędnik wyjmuje losowo kartę i informuje nas, że w rodzinie jest syn o drugim imieniu Antoni. My oceniamy szansę, że w rodzinie jest dwóch synów (być może obaj o drugim imieniu Antoni).

Literatura

[1] Deborah J. Bennett, *Randomness*, Harvard University Press, 1998.

[2] J. Jakubowski, R. Sztencel, *Prawdopodobieństwo warunkowe*, Delta, 10/2003.

*Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego