Podziały przestrzeni euklidesowych

Paweł JANIC[*]

[*]student Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

Jest to skrót pracy nagrodzonej srebrnym medalem na XXVII Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 2005 roku.

Problem. *Na ile maksymalnie kawałków k hiperpłaszczyzn $(d-1)$-wymiarowych może podzielić d-wymiarową hiperprzestrzeń?*

Okazuje się, że rozwiązanie tego zadania, w połączeniu z kilkoma prostymi twierdzeniami, pozwala odpowiedzieć na szeroką klasę pytań związanych z podziałami przestrzeni. Dla wygody i zwięzłości zapisu wprowadźmy pewien symbol.

Definicja 1. *Niech Δ_k^d $(d,k\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ oznacza maksymalną liczbę kawałków, jaką można otrzymać, dzieląc d-wymiarową hiperprzestrzeń k hiperpłaszczyznami $(d-1)$-wymiarowymi. Dla każdego k przyjmujemy, że $\Delta_k^0=1$.*

Brzmi to groźnie, więc sens wyjaśnimy na przykładzie. Z podziału prostej $(d=1)$ 2 punktami otrzymamy 3 kawałki – jeden odcinek i 2 półproste, więc $\Delta_2^1=3$. Dzieląc płaszczyznę $(d=2)$ 3 liniami, maksymalnie możemy otrzymać 7 kawałków, więc $\Delta_3^2=7$. Dla przestrzeni 3-wymiarowej i 3 płaszczyzn mamy $\Delta_3^3=8$.

Rozpatrzmy przypadki szczególne problemu wyjściowego.

Prosta. Łatwo zauważyć, że k punktów dzieli prostą na $k+1$ części, a ponieważ $\forall_k \Delta_k^0=1$, więc

$$\Delta_k^1=\Delta_{k-1}^1+\Delta_{k-1}^0. \tag{$*$}$$

Płaszczyzna. Załóżmy, że mamy już na płaszczyźnie $k-1$ prostych, które dzielą ją na maksymalną liczba kawałków, czyli Δ_{k-1}^2. Prosta k-ta dodaje tyle samo obszarów, ile kawałków wyjdzie z podziału tej prostej przez $k-1$ zastanych linii. Z $(*)$ wnioskujemy, że maksymalnie możemy ich otrzymać Δ_{k-1}^1, bo $k-1$ prostych może przeciąć inną prostą w co najwyżej $k-1$ punktach, stąd

$$\Delta_k^2=\Delta_{k-1}^2+\Delta_{k-1}^1.$$

Przestrzeń trójwymiarowa. Liczba nowych trójwymiarowych obszarów zdefiniowanych przez k-tą płaszczyznę jest równa liczbie dwuwymiarowych obszarów wyznaczonych na płaszczyźnie cięcia przez jej przecięcia z innymi płaszczyznami, stąd wniosek:

$$\Delta_k^3=\Delta_{k-1}^3+\Delta_{k-1}^2.$$

Ogólnie zachodzi

Twierdzenie 1. $\forall_{d,k\in\mathbb{N}}\ \Delta_k^d=\Delta_{k-1}^d+\Delta_{k-1}^{d-1}.$

Dowód opiera się na ścisłej analogii między niższymi a wyższymi wymiarami, tak jak to miało miejsce np. między płaszczyzną a przestrzenią trójwymiarową. Postać rekurencyjna jest mało efektywna przy większych parametrach, dlatego warto dysponować „jawnym” wzorem na Δ_k^d.

Twierdzenie 2. $\forall_{d,k\in\mathbb{N}}\ \Delta_k^d=\sum\limits_{i=0}^{d}\binom{k}{i}.$

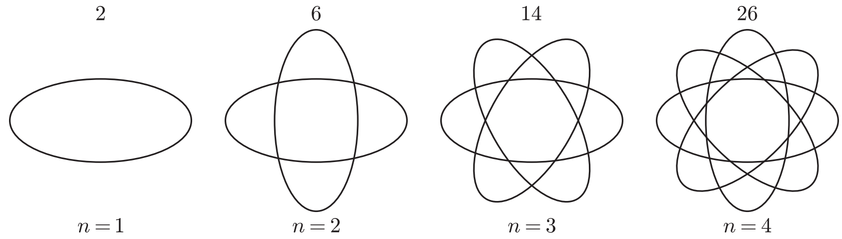
Co łatwo sprawdzić: wystarczy podstawić sumę do równania z twierdzenia 1, rozwinąć prawą stronę i połączyć w pary odpowiednie współczynniki. Bezpośrednio z twierdzenia 2 wynika, że Δ_k^d wyraża się wielomianem stopnia d zmiennej k. Korzystając z lekko zmodyfikowanej metody dowodzenia z twierdzenia 1 oraz opierając się na twierdzeniu 2, można udowodnić

Twierdzenie 3. *Maksymalna liczba kawałków, które można otrzymać z podziału d-wymiarowej hiperprzestrzeni k obiektami, wyraża się wielomianem zmiennej k, stopnia d.*

Zastosowania. Twierdzenie 3 pozwala na szybkie rozwiązywanie zadań związanych z podziałami przestrzeni. Znając stopień wielomianu, możemy ręcznie sprawdzić wartości początkowe, podstawić i obliczyć współczynniki, jednak dla wyższych wymiarów czy skomplikowanych obiektów sprawa komplikuje się do tego stopnia, że to podejście staje się niepraktyczne. Wtedy można już tylko wykorzystać specjalne właściwości badanego kształtu lub wymodelować przypadki początkowe komputerowo.

Zadanie. Na ile maksymalnie kawałków może podzielić płaszczyznę 256 elips?

Odpowiedzią jest wartość $W(256)$, przy czym $W(n)$ jest wielomianem charakterystycznym dla elipsy. Sprawdźmy wartości początkowe.



Wiemy, że $W(n)$ jest wielomianem stopnia 2. Podstawiając dowolną trójkę wartości n i $W(n)$ z rysunku, otrzymujemy układ równań linowych. Po rozwiązaniu, $W(n) = 2n^2 - 2n + 2$. Odpowiedź: $W(256) = 130\,562$.

Skracanie w uogólnieniach

*Krzysztof OLEŚ**

Spróbujmy uogólnić dodawanie i odejmowanie. Te operacje dobrze znamy (dopiero po pewnym czasie słyszymy, że działanie to funkcja, funkcja to relacja, relacja to zbiór – i popadamy w wątpliwości), możemy więc pokusić się o pewien eksperyment: spróbujmy dodawać i odejmować zbiory. Przed oczyma stają diagramy Venna i wszystko wydaje się oczywiste. My jednak pójdziemy w stronę arytmetyki.

Przypomnijmy, że $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$, oraz dla $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ możemy zdefiniować dodawanie i odejmowanie „po współrzędnych”, mianowicie $x \pm y = (x_1 \pm y_1, \ldots, x_n \pm y_n)$. Ponadto, analogiczne x możemy przemnożyć przez $\lambda \in \mathbb{R}$ w następujący sposób: $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. Po tej nużącej retrospekcji pojawiają się działania. Dla $A,\ B \subseteq \mathbb{R}^n$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}\,. \tag{1}$$

Kiedy dodamy (nomen omen), że dla odejmowania sytuacja jest podobna, to całość staje się jasna. Czy aby na pewno?
Pojawiają się pytania dwojakiego rodzaju. Geometryczne, np. co otrzymamy sumując koło i jego brzeg? Arytmetyczne, np. czy prawdą jest, że $A + A = 2A$?

W naszych rozważaniach zajmiemy się jednym z pytań arytmetycznych – sformułujemy je w postaci twierdzenia.

Twierdzenie 1. *Niech A będzie niepustym i ograniczonym zbiorem w $\mathbb{R}^n$, niech ponadto B i C będą domkniętymi i wypukłymi zbiorami w $\mathbb{R}^n$. Jeśli $A + B = A + C$, to $B = C$.*

Jan Tadeusz Stanisławski powiedziałby w tym momencie: i to by było na tyle. Ostatnia linijka twierdzenia to przecież takie zwykłe skracanie (chciałoby się nawet coś obustronnie poskreślać). Zasnąć spokojnie nie pozwalają jednak założenia. Z pewną taką nieśmiałością – zacznijmy bez nich. Niech D oznacza koło (na płaszczyźnie) o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 1, a E jego brzeg. Łatwo zauważyć (osławione hasło-wytrych sygnalizujące zadanie dla Czytelnika), że $D + D$ jest kołem o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 2, oraz że tym samym kołem jest $D + E$, natomiast $D \neq E$. Nie możemy bezkarnie skracać!

*Instytut Matematyczny Uniwersytetu Śląskiego