Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 2006

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
402 ($WT = 3{,}29$) i **403** ($WT = 1{,}53$)
z numeru 9/2005

Jerzy Witkowski	– Radlin	43,98
Mateusz Łącki	– Kraków	32,93
Konrad Kapcia	– Częstochowa	27,70
Tomasz Tkocz	– Rybnik	18,90
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	17,43
Jacek Konieczny	– Poznań	14,91

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 517, 518

Redaguje Marcin E. KUCZMA

517. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych x, y, dla których każda z liczb $2x+y$, $3x-2y$, $11x+9y$ jest kwadratem liczby całkowitej.

518. Zbiór $\{1,2,\ldots,3n\}$ został podzielony w dowolny sposób na trzy rozłączne zbiory n-elementowe A, B, C (n jest dowolną liczbą naturalną). Udowodnić, że istnieją liczby $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$, z których jedna jest równa sumie dwóch pozostałych.

Zadanie 518 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/2005

Przypominamy treść zadań:

509. Dany jest nieskończony ciąg liczb dodatnich $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Niech c_n będzie największą liczbą całkowitą, której kwadrat nie przekracza

$$(a_1+\ldots+a_n)\left(\tfrac{1}{a_1}+\ldots+\tfrac{1}{a_n}\right).$$

Wykazać, że ciąg $c_1, c_2, c_3, \ldots$ jest ściśle rosnący.

510. Dla ustalonej liczby naturalnej n rozważamy zbiór X, którego elementami są wszystkie ciągi $(x_1,\ldots,x_n)$ o wyrazach równych 0 lub 1. Określamy odległość

$$\delta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |x_1-y_1| + \ldots + |x_n-y_n|$$

dla $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in X$, $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)\in X$. Niech $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in X$ spełniają warunek $\delta(\mathbf{x},\mathbf{y})=\delta(\mathbf{y},\mathbf{z})=\delta(\mathbf{z},\mathbf{x})=\ell$ (wierzchołki „trójkąta równobocznego” w przestrzeni metrycznej $\langle X,\delta\rangle$). Wyznaczyć (w zależności od ℓ) najmniejszą liczbę r, dla której istnieje taki punkt $\mathbf{s}\in X$, że $\delta(\mathbf{s},\mathbf{x})=\delta(\mathbf{s},\mathbf{y})=\delta(\mathbf{s},\mathbf{z})=r$.

509. Oznaczając

$$s_n = a_1+\ldots+a_n, \qquad t_n = \frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n},$$

przepisujemy określenie c_n jako $c_n = \lfloor\sqrt{s_nt_n}\rfloor$. Mamy ciąg zależności

$$s_{n+1}t_{n+1} = \big(s_n+a_{n+1}\big)\Big(t_n+\frac{1}{a_{n+1}}\Big) = s_nt_n + X_n + 1,$$

gdzie

$$X_n = a_{n+1}t_n + \frac{s_n}{a_{n+1}} \geqslant 2\sqrt{s_nt_n}$$

(średnia arytmetyczna i geometryczna). Zatem

$$s_{n+1}t_{n+1} \geqslant s_nt_n + 2\sqrt{s_nt_n} + 1 = \big(\sqrt{s_nt_n}+1\big)^2,$$

czyli $\sqrt{s_{n+1}t_{n+1}} \geqslant \sqrt{s_nt_n}+1$, skąd wniosek, że $c_{n+1}\geqslant c_n+1$.

510. Jak łatwo sprawdzić, odległość δ spełnia warunki wymagane od metryki – w szczególności warunek trójkąta. Jeśli więc punkty $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ są wierzchołkami „trójkąta równobocznego” o boku ℓ i jeśli istnieje punkt $\mathbf{s}\in X$ leżący w jednakowej δ-odległości od każdego z nich, to $\ell=\delta(\mathbf{x},\mathbf{y})\leqslant\delta(\mathbf{s},\mathbf{x})+\delta(\mathbf{s},\mathbf{y})=2r$. Pokażemy, że równość $2r=\ell$ daje się zrealizować.

Niech $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$, $\mathbf{z}=(z_1,\ldots,z_n)$. Określamy zbiory wskaźników

$$\begin{aligned}
A &= \{i\colon\ x_i=1, y_i=1, z_i=1\}, & E &= \{i\colon\ x_i=1, y_i=0, z_i=0\},\\
B &= \{i\colon\ x_i=1, y_i=1, z_i=0\}, & F &= \{i\colon\ x_i=0, y_i=1, z_i=0\},\\
C &= \{i\colon\ x_i=1, y_i=0, z_i=1\}, & G &= \{i\colon\ x_i=0, y_i=0, z_i=1\},\\
D &= \{i\colon\ x_i=0, y_i=1, z_i=1\}, & H &= \{i\colon\ x_i=0, y_i=0, z_i=0\}.
\end{aligned}$$

Oznaczmy liczby elementów w zbiorach $A,B,\ldots,H$ odpowiednio małymi literami $a,b,\ldots,h$. Wówczas

$$\begin{aligned}
\delta(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= d+e+c+f,\\
\delta(\mathbf{y},\mathbf{z}) &= c+f+b+g,\\
\delta(\mathbf{z},\mathbf{x}) &= b+g+d+e.
\end{aligned}$$

Te trzy liczby są z założenia równe ℓ, skąd wynika, że $d+e=c+f=b+g=\frac12\ell$ (liczba ℓ jest więc parzysta). Wystarczy teraz przyjąć $\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_n)$,

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{dla } i\in A\cup B\cup C\cup D,\\ 0 & \text{dla } i\in E\cup F\cup G\cup H.\end{cases}$$

Tak określony punkt $\mathbf{s}$ spełnia równości $\delta(\mathbf{s},\mathbf{x})=d+e$, $\delta(\mathbf{s},\mathbf{y})=c+f$, $\delta(\mathbf{s},\mathbf{z})=b+g$; każda z tych trzech liczb jest równa $\frac12\ell$. Zatem $r=\frac12\ell$ jest minimalną liczbą o postulowanej własności.

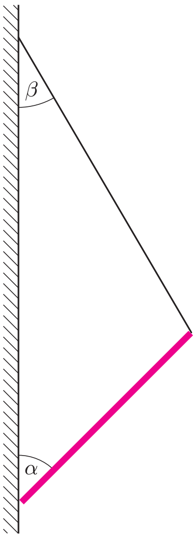
Klub 44

Zadania z fizyki nr 414, 415

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2006

414. Jednorodna belka jednym końcem opiera się o pionową ścianę, tworząc z nią kąt α, a drugi jej koniec jest podtrzymywany przez linkę tworzącą ze ścianą kąt β (rys. 1). Jaki musi być współczynnik tarcia między belką a ścianą, aby belka nie zsunęła się w dół?



Rys. 1

415. W pewnej metodzie rozdzielania dwóch izotopów A i B pewnego pierwiastka elementarną operacją jest rozdzielenie 2 moli mieszaniny zawierającej $2p_A$ moli izotopu A na 1 mol mieszaniny, w której stosunek liczb moli jest r razy większy od wyjściowego

$$\frac{p'_A}{p'_B} = \frac{p_A}{p_B} r$$

i 1 mol pozostałości. Ponadto na każdym etapie dopuszczalne jest łączenie (mieszanie) dowolnie wybranych próbek. Jeśli $r = 1{,}03$, to ile elementarnych operacji trzeba przeprowadzić, aby z 1000 moli mieszaniny o składzie 50%A i 50%B wyodrębnić 400 moli mieszaniny zawierającej 80% izotopu A? Wystarczy odpowiedź przybliżona.

Wskazówka: Rozwiązanie może być oparte na obliczeniach komputerowych, albo też na wzorach na entropię mieszaniny.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/2005

Przypominamy treść zadań:

406. Gęstość szkła wynosi $2{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$, a współczynnik załamania 1,5. Obliczyć natężenie strumienia światła skierowanego w górę (moc na jednostkę powierzchni prostopadłej) niezbędne do tego, aby w nim lewitowała kulka o promieniu 0,1 mm wykonana z tego szkła. Odbicie światła od powierzchni kulki, absorpcję, a także efekty falowe (dyfrakcję) należy pominąć.

407. Obwód elektryczny składa się ze źródeł siły elektromotorycznej i oporników podlegających prawu Ohma; ponadto w obwodzie znajduje się amperomierz oraz opornik o zmiennej oporności (niekoniecznie sąsiadujące). Stwierdzono, że przy dwóch różnych wartościach oporności tego opornika amperomierz wskazywał jednakową wartość natężenia prądu. Czy jest możliwe, żeby przy jeszcze innej oporności tego samego opornika amperomierz zmienił wskazanie?

406. Jeśli promień światła pada na kulkę o promieniu R wykonaną ze szkła w odległości r od jej osi (zob. rys. 2), to kąt padania jest równy

$$\alpha = \arcsin(r/R),$$

kąt załamania

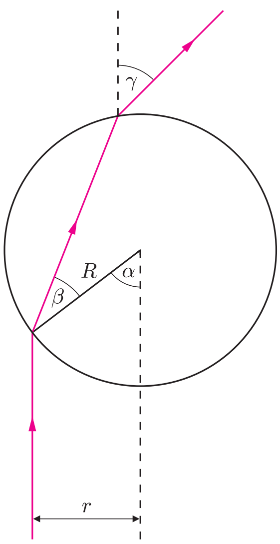
$$\beta = \arcsin(r/nR),$$

kąt odchylenia od kierunku początkowego

$$\gamma = 2(\alpha - \beta),$$

a zmiana składowej pędu promienia wzdłuż kierunku początkowego

$$\Delta p = p(1 - \cos\gamma).$$



Rys. 2

Wprowadziliśmy tu oznaczenia n – współczynnik załamania, p – pęd początkowy. Moc promieniowania $\mathrm{d}P$ padającego na kulkę w przedziale odległości od osi od r do $r + \mathrm{d}r$ jest równa iloczynowi natężenia światła I przez powierzchnię pierścienia o grubości $\mathrm{d}r$, tzn. $\mathrm{d}P = I \cdot 2\pi r \mathrm{d}r$. Po podzieleniu tej wielkości przez prędkość światła c otrzymujemy pęd niesiony przez tę wiązkę promieniowania w ciągu 1 sekundy, czyli siłę, która byłaby wywierana przez wiązkę, gdyby uległa ona absorpcji. Jak wynika z poprzedniego rozumowania, rzeczywistą siłę F unoszącą kulkę otrzymamy mnożąc $\mathrm{d}P/\mathrm{c}$ przez czynnik $(1 - \cos\gamma)$ i całkując od 0 do R. Po wprowadzeniu zmiennej $u = r/R$ otrzymujemy wyrażenie

$$F = \frac{1}{\mathrm{c}} 2\pi R^2 \int_0^1 \left\{1 - \cos\left[2\left(\arcsin u - \arcsin\frac{u}{n}\right)\right]\right\} u\,\mathrm{d}u.$$

Występującą tu całkę można obliczyć prawdopodobnie tylko numerycznie – dla podanej wartości n okazuje się ona równa 0,120. Po przyrównaniu F do ciężaru kulki $\frac{4}{3}R^3\rho\mathrm{g}$ (ρ – gęstość szkła) otrzymujemy

$$I = \frac{4}{3 \cdot 0{,}120} R\rho\mathrm{gc} = 8{,}2\ \mathrm{GW/m^2} = 8{,}2\ \mathrm{kW/mm^2}.$$

407. Żadna zmiana w rozkładzie prądów w obwodzie nie nastąpi, jeśli zamienimy opornik na źródło siły elektromotorycznej o wartości równej napięciu na tym oporniku. Zmiana oporu opornika jest równoważna zmianie tej siły elektromotorycznej (pomijamy banalny przypadek, gdy przez opornik prąd nie płynie i ta siła elektromotoryczna jest równa zeru). Z drugiej strony, opisany obwód jest liniowy, tzn. natężenie prądu płynącego przez amperomierz jest liniową funkcją każdej z sił elektromotorycznych występujących w obwodzie. Funkcja liniowa przybierająca jednakową wartość dla dwóch różnych argumentów jest stała – dlatego zmiana wskazania amperomierza nie jest możliwa.

Można wykazać, że najogólniejszą postacią zależności natężenia prądu w wybranej gałęzi od oporu opornika jest funkcja homograficzna

$$I = \frac{aR + b}{cR + d}.$$