

Diagramy Venna

W tym artykule zajmiemy się nieco dokładniej diagramami Venna, opisanymi w znakomitym artykule [2]. Najpierw powiemy, co to jest niezależna rodzina zbiorów. Przypuśćmy, że mamy daną rodzinę $\{A_1, \dots, A_n\}$ podzbiorów pewnego ustalonego zbioru S . Od tej pory wszystkie rozpatrywane zbiory będą podziorami tego zbioru S (będziemy go nazywać przestrzenią S). Niech A' oznacza dopełnienie zbioru A do przestrzeni S , tzn. $A' = S \setminus A$. Oznaczmy następnie $A_i^1 = A_i$ oraz $A_i^0 = A_i'$ dla $i = 1, \dots, n$. Każdy zbiór postaci $A_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap A_n^{\alpha_n}$, gdzie $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{0, 1\}$, nazywamy **składową** rodziny $\{A_1, \dots, A_n\}$. Oczywiście każda n -elementowa rodzina zbiorów ma 2^n składowych. Składowymi rodziny zbiorów $\{A, B, C\}$ będą zbiory:

$$\begin{aligned} A^0 \cap B^0 \cap C^0 &= A' \cap B' \cap C', \\ A^1 \cap B^0 \cap C^0 &= A \cap B' \cap C', \\ A^0 \cap B^1 \cap C^0 &= A' \cap B \cap C', \\ A^1 \cap B^1 \cap C^0 &= A \cap B \cap C', \\ A^0 \cap B^0 \cap C^1 &= A' \cap B' \cap C, \\ A^1 \cap B^0 \cap C^1 &= A \cap B' \cap C, \\ A^0 \cap B^1 \cap C^1 &= A' \cap B \cap C, \\ A^1 \cap B^1 \cap C^1 &= A \cap B \cap C. \end{aligned}$$

Gdy wszystkie składowe rodziny $\{A_1, \dots, A_n\}$ są różne i niepuste, rodzinę nazwiemy **niezależną**.

A oto przykład rodziny niezależnej $\{A, B, C\}$ podzbiorów przestrzeni $S = \{0, 1, \dots, 7\}$:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 5, 6\}, C = \{3, 4, 6, 7\}.$$

Rodziny niezależne są wykorzystywane w dowodach tożsamości z rachunku zbiorów. Prawdziwe jest bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie. Niech $W_1(A, B, C)$ i $W_2(A, B, C)$ będą wyrażeniami rachunku zbiorów (tzn. występują w nich tylko zbiory A, B i C oraz symbole działań na zbiorach: \cup, \cap, \setminus). Jeśli dla pewnej niezależnej rodziny $\{P, Q, R\}$ podzbiorów pewnej przestrzeni S zachodzi równość $W_1(P, Q, R) = W_2(P, Q, R)$, to ta równość zachodzi także dla dowolnych zbiorów A, B i C .

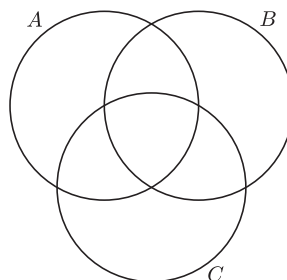
Twierdzenia tego nie będziemy dowodzić, popatrzymy natomiast na przykład jego zastosowania. Udowodnimy równość $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. Dla naszej rodziny niezależnej mamy:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ (A \cup B) \setminus C &= \{1, 2, 5\}, \\ A \setminus C &= \{1, 2\}, \\ B \setminus C &= \{2, 5\}, \\ (A \setminus C) \cup (B \setminus C) &= \{1, 2, 5\}. \end{aligned}$$

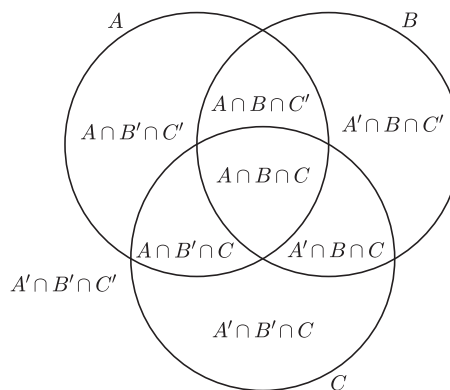
Okazało się, że dla tej rodziny niezależnej zachodzi dowiedziona równość. Zatem ta równość jest prawdziwa dla dowolnych zbiorów A, B i C . Podobne twierdzenie jest prawdziwe dla wyrażen zawierających więcej zbiorów. Dowód znajduje się np. w książce [1].

Wojciech GUZICKI*

Dowody takie jak powyższy szczególnie łatwo przeprowadzić na rysunku. Rysujemy niezależną rodzinę podzbiorów pewnej przestrzeni S i zaznaczamy na tym rysunku zbiory występujące po obu stronach równości. Jeśli oba zaznaczone zbiory są identyczne, to równość zachodzi dla dowolnych zbiorów. Niezależną rodzinę zbiorów $\{A, B, C\}$ najprościej narysować w następujący sposób.



Taki rysunek nazywamy diagramem Venna. Każdy z n zbiorów naszej rodziny niezależnej $\{A_1, \dots, A_n\}$ jest narysowany w postaci pewnego podzbioru płaszczyzny (w naszym przypadku są to trzy koła), przy czym rozważana przestrzeń (u nas płaszczyzna) jest podzielona krzywymi ograniczającymi zbiory A_1, \dots, A_n na 2^n (u nas $2^3 = 8$) części. Każda z tych części odpowiada jednej składowej (zakładamy, że części te są spójne, czyli w jednym kawałku). A oto te składowe:



W dalszym ciągu ustalimy jednolity sposób numerowania składowych. Numerem składowej

$$A_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap A_n^{\alpha_n}$$

jest liczba, której kolejnymi cyframi w zapisie w systemie dwójkowym są: $\alpha_n, \dots, \alpha_1$. Na przykład, jeśli naszą rodziną niezależną jest $\{A, B, C\}$ (tzn. $A_1 = A, A_2 = B$ oraz $A_3 = C$), to składowa

$$A' \cap B \cap C = A_1^0 \cap A_2^1 \cap A_3^1$$

ma numer 6, gdyż liczba 6 ma zapis dwójkowy 110. Podobnie składowa

$$A \cap B \cap C' = A_1^1 \cap A_2^1 \cap A_3^0$$

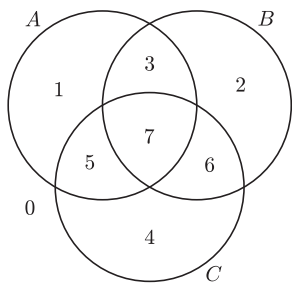
ma numer 3, gdyż liczba 3 ma zapis dwójkowy 011. W przypadku, gdy rodzina niezależna składa się z czterech zbiorów $\{A, B, C, D\}$, to składowa

$$A' \cap B \cap C' \cap D = A_1^0 \cap A_2^1 \cap A_3^0 \cap A_4^1$$

ma numer 10, gdyż liczba 10 ma zapis dwójkowy 1010.

* Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego

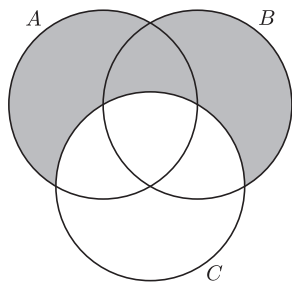
A oto nasz diagram Venna dla trzech zbiorów A , B i C ze składowymi ponumerowanymi w ten sposób:



Czytelnik zechce sam sprawdzić, że zbiory po obu stronach równości

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

wyglądają w następujący sposób.



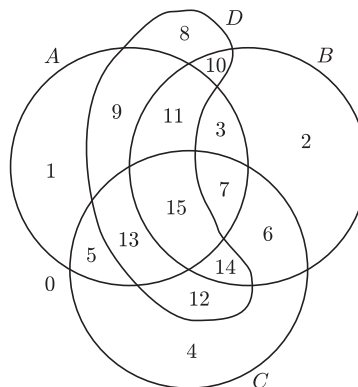
Z powyższych rozważań widać, że umiejętność rysowania niezależnych rodzin zbiorów (czyli diagramów Venna) może się przydać w praktyce do dowodzenia równości w rachunku zbiorów. We wspomnianym artykule została pokazana jedna metoda rysowania diagramów Venna. Jednak diagramy dla dużych liczb n były bardzo skomplikowane i mało czytelne. Powstaje naturalne pytanie, czy można narysować diagram Venna, w którym wszystkie zbiory mają stosunkowo prostą postać. Diagram Venna dla trzech zbiorów można było narysować za pomocą trzech okręgów. A czy można tak narysować cztery okręgi, by tworzyły diagram Venna dla czterech zbiorów?

Okazuje się, że jest to niemożliwe. Mianowicie za pomocą trzech okręgów można podzielić płaszczyznę na co najwyżej 8 części. Czwarty okrąg przetnie każdy z dotychczasowych okręgów w co najwyżej dwóch punktach; te punkty podzielą go zatem na co najwyżej 6 łuków. Każdy łuk dzieli jeden obszar na dwie części. Zatem cztery okręgi dzielą płaszczyznę na co najwyżej $8 + 6 = 14$ części. Nie otrzymamy zatem diagramu Venna, gdyż taki diagram dla czterech zbiorów ma mieć 16 składowych. Rozumując w podobny sposób, można pokazać, że jeśli a_n oznacza maksymalną liczbę części, na jakie n okręgów może podzielić płaszczyznę, to ciąg (a_n) spełnia następujące równania rekurencyjne:

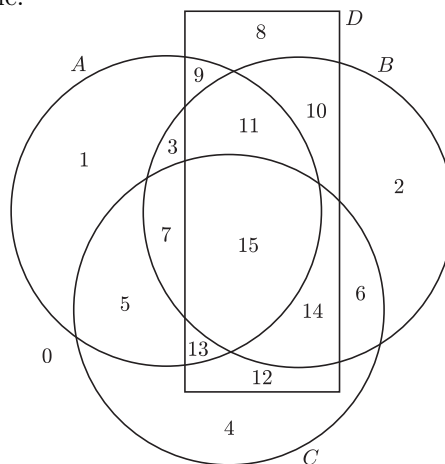
$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 2n.$$

Nietrudno teraz dowieść przez indukcję, że $a_n = n^2 - n + 2$; dla $n = 4$ otrzymamy $a_4 = 14$. Zatem żadna konfiguracja czterech okręgów na płaszczyźnie nie tworzy diagramu Venna. Oczywiście, czwarty zbiór możemy dorysować do trzech okręgów inaczej.

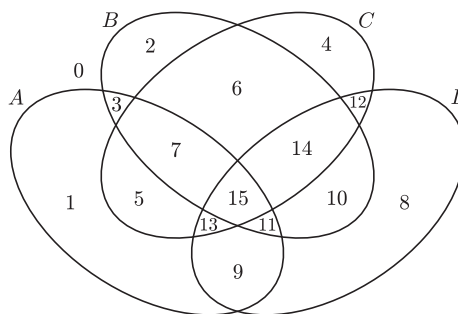
Na następnym rysunku mamy przykład takich czterech zbiorów.



Składowe na tym diagramie Venna zostały ponumerowane zgodnie z przyjętą wyżej zasadą. Powstaje oczywiście pytanie, czy można dorysować czwarty zbiór tak, by był on zbiorem wypukłym. Gdy byłem jeszcze studentem, wydawało mi się to oczywiście niemożliwe; zresztą tak uważało wielu moich kolegów. Następujący rysunek, który mimo wszystko kiedyś udało mi się narysować, wprawił mnie w zrozumiiałe zdumienie.



Inny diagram Venna otrzymamy, rysując cztery elipsy.



Jeszcze inny, składający się z czterech prostokątów, można łatwo narysować samemu. Prostokąty te mają wierzchołki w punktach o następujących współrzędnych:

$$A : (0, 6), (6, 0), (10, 4), (4, 10),$$

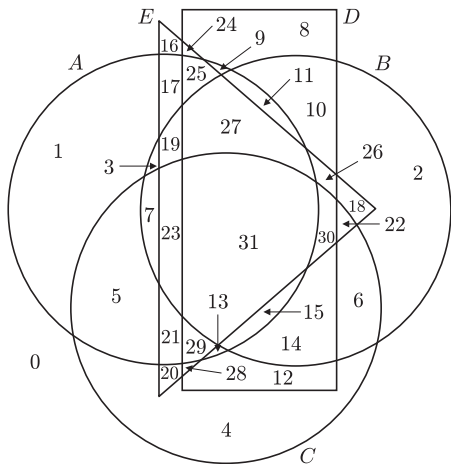
$$B : (14, 6), (10, 10), (4, 4), (8, 0),$$

$$C : (6, 10), (4, 8), (8, 4), (10, 6),$$

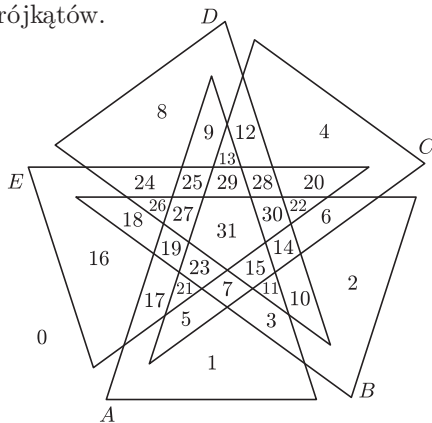
$$D : (8, 10), (4, 6), (6, 4), (10, 8).$$

Gdy udało się narysować diagram Venna, w którym wszystkie cztery zbiory były wypukłe, należało

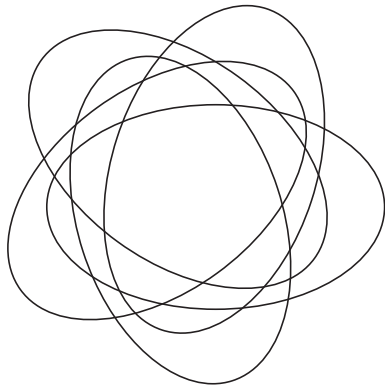
spróbować zrobić to samo dla pięciu zbiorów. Do trzech kół i prostokąta udało mi się dorysować jeszcze trójkąt.



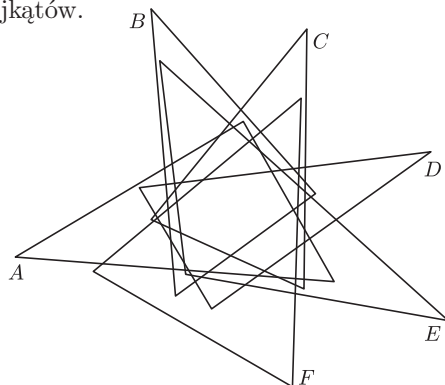
Można również narysować diagram Venna składający się z pięciu trójkątów.



Szczególnie ładny jest utworzony na podobnej zasadzie diagram Venna złożony z pięciu elips.



Można także narysować diagram Venna składający się z sześciu trójkątów.



Wierzchołki tych trójkątów mają następujące współrzędne:

- $A : (221, 73), (0, 90), (158, 184),$
- $B : (111, 63), (94, 262), (208, 134),$
- $C : (200, 68), (94, 116), (202, 248),$
- $D : (136, 54), (86, 138), (288, 163),$
- $E : (300, 46), (118, 78), (100, 226),$
- $F : (192, 0), (54, 80), (198, 200).$

Okazuje się jednak, że nie można narysować diagramu Venna złożonego z więcej niż sześciu trójkątów. Aby tego dowiedzieć, pokażemy najpierw, że jeśli t_n jest największą liczbą obszarów, na jakie n trójkątów może podzielić płaszczyznę, to ciąg (t_n) spełnia następujące równania rekurencyjne: $t_1 = 2, t_{n+1} = t_n + 6n$. Jeden trójkąt oczywiście dzieli płaszczyznę na dwa obszary. Przypuśćmy teraz, że mamy już n trójkątów na płaszczyźnie. Następny trójkąt przecina każdy z tych n trójkątów w co najwyżej 6 punktach. Te punkty przecięcia dzielą obwód tego ostatniego trójkąta na co najwyżej $6n$ części; każda z tych części dzieli jeden obszar na dwie części. Zatem maksymalna liczba części, na jakie możemy podzielić płaszczyznę za pomocą $n + 1$ trójkątów, wynosi co najwyżej $t_n + 6n$ (pozostawimy jako ćwiczenie przekonanie się, że można tak umieścić n trójkątów na płaszczyźnie, by każde dwa przecinały się w dokładnie 6 punktach; taka konfiguracja da właśnie t_n części). Teraz można łatwo udowodnić przez indukcję, że $t_n = 3n^2 - 3n + 2$. Można również łatwo udowodnić, że jeśli $n \geq 8$, to $3n^2 - 3n + 2 < 2^n$. To pokazuje, że jeśli $n \geq 8$, to żadna konfiguracja n trójkątów na płaszczyźnie nie tworzy diagramu Venna. Jeśli zaś $n = 7$, to $3n^2 - 3n + 2 = 3 \cdot 49 - 21 + 2 = 128 = 2^7$. Zatem można tak umieścić 7 trójkątów na płaszczyźnie, by podzieliły one płaszczyznę na 2^7 obszarów. Jednak taka konfiguracja nie będzie diagramem Venna. Mianowicie każde dwa trójkąty muszą przecinać się w sześciu punktach, a więc wierzchołki każdego trójkąta leżą na zewnątrz każdego innego. Stąd wynika, że w każdym trójkącie trzy obszary wewnętrzne, na których brzegu leżą wierzchołki, zawarte są tylko w tym jednym trójkącie, a więc stanowią części tej samej składowej. A to znaczy, że ta konfiguracja nie jest diagramem Venna.

Widzimy więc, że istnieje diagram Venna złożony z sześciu trójkątów i nie istnieją diagramy Venna złożone z n trójkątów dla $n \geq 7$. A jak jest z czworokątami wypukłymi? Albo z pięciokątami wypukłymi? A czy dla każdego n istnieje diagram Venna złożony z wielokątów wypukłych? Odpowiedzi na niektóre tak postawione pytania są znane. Myślę jednak, że warto pokusić się o to, by na podobne pytania odpowiedzieć samemu. Obszerny przegląd wiadomości na temat diagramów Venna można znaleźć w [3]; tam też są odnośniki do wielu innych interesujących źródeł.

Bibliografia

- [1] W. Guzicki, P. Zakrzewski, *Wstęp do matematyki. Wprowadzenie do teorii mnogości*. PWN Warszawa, 2005.
- [2] J. Tyszkiewicz, *Pizza Venna*, Delta 3(358), 2004, str. 10–11.
- [3] <http://www.combinatorics.org/Surveys/ds5/VennEJC.html>