Rozkład św. Mikołaja

Rafał SZTENCEL *

W każdym chyba zbiorze zadań z rachunku prawdopodobieństwa występuje następujące

Zadanie. Niech π będzie losową permutacją zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Jaka jest szansa, że $\pi(k) \neq k$ dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$?

Będzie ono bardziej zrozumiałe, gdy ubierzemy je w tekst o roztrzepanej sekretarce, wkładającej losowo listy do zaadresowanych kopert, albo o uczestnikach przyjęcia, którzy wychodząc wkładają losowo kapelusze. Pytamy wtedy o szansę, że żaden list nie trafi do właściwej koperty, albo żaden kapelusz na właściwą głowę.

Jeśli dla pewnego k mamy $\pi(k) = k$, mówimy o koincydencji. Pytamy zatem o prawdopodobieństwo $p_{0,n}$, że liczba koincydencji będzie równa zeru. Można je obliczyć ze wzoru włączeń i wyłączeń:

$$p_{0,n} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \pm \frac{1}{n!} \approx \mathrm{e}^{-1}.$$

W wielu zbiorach zadań każe się ponadto obliczyć prawdopodobieństwa $p_{k,n}$ dla $k = 1, 2, \ldots n$. Jeśli chcemy, by dokładnie k osób miało na głowach swoje kapelusze, to musimy wybrać te osoby (na $\binom{n}{k}$ sposobów), rozdać im kapelusze (na 1 sposób), i wreszcie przydzielić pozostałym $n-k$ osobom kapelusze tak, by żaden nie dostał własnego (na $p_{0,n-k} \cdot (n-k)!$ sposobów). Wynika stąd, że

$$p_{k,n} = \frac{\binom{n}{k} \cdot p_{0,n-k} \cdot (n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!} p_{0,n-k} = = \frac{1}{k!}\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \pm \frac{1}{(n-k)!}\right).$$

Zwróćmy uwagę, że $p_{n-1,n} = 0$ (dlaczego?). Gdy $n \to \infty$, to

$$p_{k,n} = \frac{1}{k!}\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \pm \frac{1}{(n-k)!}\right) \to \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}.$$

Wobec tego dla dużych n liczba koincydencji ma rozkład zbliżony do rozkładu Poissona z parametrem 1. Zapytajmy teraz, jaka jest średnia liczba koincydencji? Wystarczy obliczyć

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_{k,n}, \tag{1}$$

co jest możliwe, choć nieprzyjemne. Pewną wskazówką mogą być średnie $e_1 = e_2 = 1$ oraz średnia w rozkładzie Poissona — równa parametrowi rozkładu, czyli 1. Spróbujmy obliczyć e_3 za pomocą tabeli wszystkich permutacji:

①	②	③	3
2	3	1	0
3	1	2	0
3	②	1	1
①	3	2	1
2	1	③	1
2	2	2	6

Jest 6 możliwych permutacji. Sumując liczby koincydencji w wierszach, widzimy, że jest ich $3+0+0+1+1+1 = 6$, czyli średnio jedna na jedną permutację. Nieco inaczej: z tabeli widać, że

$$p_{0,3} = \frac{1}{3}, \quad p_{1,3} = \frac{1}{2}, \quad p_{2,3} = 0, \quad p_{3,3} = \frac{1}{6},$$

zatem wzór (1) przybiera postać

$$e_3 = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{6} = 1.$$

Koincydencje pojawiają się w wierszach dość nieregularnie, dlatego dowód faktu, że $e_n = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jest pracochłonny. Spójrzmy teraz na kolumny tabeli – w każdej kolumnie są 2 koincydencje! W ogólnym przypadku jest n kolumn, w każdej $\frac{1}{n} \cdot n! = (n-1)!$ koincydencji, czyli łącznie $n!$, zatem znów średnio jedna na jedną permutację. Wynika to z symetrii, bowiem w każdej kolumnie jest tyle samo jedynek, dwójek, itd. Udowodniliśmy, że $e_n = 1$ dla $n = 1, 2, \ldots$

Argument ten można przedstawić w języku zmiennych losowych. Niech X_k oznacza liczbę właściwych kapeluszy na głowie k-tej osoby. Obliczamy średnią (czyli wartość oczekiwaną):

$$EX_k = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n},$$

bowiem — ze względu na symetrię — każdy kapelusz ma takie same szanse znalezienia się na głowie k-tej osoby. Jeśli X jest liczbą właściwych kapeluszy na głowach, to

$$EX = E(X_1 + \ldots + X_n) = EX_1 + \ldots + EX_n = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Na zakończenie powinniśmy wyjaśnić, skąd się wziął tytuł artykułu. Piszący te słowa brał kilkakrotnie udział w szkolnej imprezie mikołajkowej. Prawie zawsze po wylosowaniu prezentów ktoś dostawał swój własny (chyba nigdy się nie zdarzyło, żeby aż dwa prezenty wróciły do fundatorów). Może więc rozkład liczby powracających prezentów powinien wziąć nazwę od św. Mikołaja?

*Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego