



mała delta

Nieskończona zabawa

Czytelnicy *Delta* znają z pewnością liczne własności trójkąta Pascala i potrafią odkryć w nim mnóstwo ciekawych ciągów: ciąg liczb trójkątnych, ciąg liczb czworościennych (tetraedralnych) itp. Być może jednak niewielu czytelników zetknęło się z inną, znacznie późniejszą konstrukcją, w której także ukrytych jest wiele ciągów i własności.

Oto ona:

0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...
1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...
2	4	6	10	16	26	42	68	110	178	...
3	6	9	15	24	39	63	102	165	267	...
4	8	12	20	32	52	84	136	220	356	...
5	9	14	23	37	60	97	157	254	411	...
6	11	17	28	45	73	118	191	309	500	...
...

Zobaczmy, jak zbudowana jest ta nieskończona macierz, zwana macierzą Wythoffa. Pierwsze dwie kolumny stanowią jedynie materiał wyjściowy dla całej konstrukcji i nie należą do macierzy. W pierwszej mamy numer wiersza, poczynając od 0. W drugiej... Najpierw krótkie przygotowanie. Każdą liczbę naturalną możemy przedstawić jednoznacznie w postaci sumy różnych liczb Fibonacciego, tak że żadne dwa składniki tej sumy nie sąsiadują w ciągu Fibonacciego (patrz *Delta* 10/2005). Na przykład, $50 = 34 + 13 + 3$. Jeśli w rozkładzie liczby m zastąpimy każdy składnik liczbą następującą bezpośrednio po niej w ciągu Fibonacciego, otrzymamy następnik Fibonacciego liczby m , który oznaczymy $S(m)$ (uwaga: 1 zastępujemy przez 2!). Na przykład, $S(50) = 55 + 21 + 5 = 81$. Otóż w drugiej kolumnie, w wierszu o numerze n mamy liczbę $S(n) + 1$. Dalej już łatwo: każda następna liczba w danym wierszu jest sumą dwóch liczb poprzedzających ją w tym samym wierszu.

Cóż ciekawego jest w takiej nieskończonej tablicy? Poszukajmy.

W pierwszym wierszu występuje we własnej osobie sam ciąg Fibonacciego. Niewielka to niespodzianka: zaczęliśmy od 0 i 1 i potem stosowaliśmy regułę budowania tego ciągu. Nieco bardziej zaskakujący jest fakt, że każdy wiersz macierzy zaczyna się od pierwszej liczby, która nie pojawiła się w poprzednich wierszach tej macierzy. A czy przypadkiem jest to, że każda kolejna liczba w wierszu jest następnikiem Fibonacciego poprzedniej? Czy można wyjaśnić, dlaczego różnice między liczbami z , na przykład, trzeciego i pierwszego wiersza tej samej kolumny są jakie są? A czy różnice między liczbami z , na przykład, czwartego i pierwszego wiersza też się tak ciekawie układają? A różnice między liczbami z sąsiednich wierszy? Zapraszam do wyszukiwania wszelkich ciekawych faktów dotyczących macierzy Wythoffa. Jak już je zauważycie, może zechcecie pomyśleć, dlaczego tak jest?

A przy okazji wybierzcie dwie liczby całkowite dodatnie, a potem – traktując je jako pierwsze dwa wyrazy – zbudujcie na nich ciąg na takiej samej zasadzie, na jakiej jest zbudowany ciąg Fibonacciego. Rozejrzyjcie się po macierzy Wythoffa: czy Wasz ciąg przypadkiem nie występuje w którymś wierszu? No, może niekoniecznie od pierwszego wyrazu ...

Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL

Oto piętnaście początkowych liczb Fibonacciego: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610

