

ⁱ Delta 7/2005

ⁱⁱ A więc zawsze daje poprawne rozwiązanie.

Królowna Śnieżka wezwała siedmiu krasnoludków i oświadczyła, że w związku z wielkim świętem w najbliższą niedzielę postanowiła nagrodzić ich pracowitość.

– Przygotowałam dla was białe i kolorowe czapeczki. Nie powiem wam, ani ile białych, ani ile kolorowych czapeczek przygotowałam. Każdemu z was nałożę jedną z czapeczek na głowę, ale by było bardziej uroczyście, przedtem zgaszę światło. Po zapaleniu światła zobaczycie czapeczki u swoich

ⁱⁱⁱ Śnieżka jest tak złośliwa, że może nawet nałożyć krasnoludkom czapeczki jednego typu. Tak – potwierdził Gburek – nawet gdyby wszyscy dookoła mnie mieli takie same czapeczki, to i tak nie będę wiedział, co mam na głowie (cytat z artykułu „Kolorowe czapeczki”) Informacja o liczbie rodzajów czapeczek mówi jedynie o maksymalnej ich liczbie...

^{iv} Tu krasnoludek wpisuje typ, którego brakuje.

*Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

Niedługo po ukazaniu się mojego artykułu *Kolorowe czapeczki*ⁱ do redakcji przyszedł list od wieloletniego Czytelnika Delty, Jana Błaszczczyńskiego, z propozycją rozwiązania postawionego tam problemu. Proste rozwiązanie Jana Błaszczczyńskiego, w przeciwieństwie do przedstawionego w moim artykule, jest deterministyczneⁱⁱ, i na dodatek pozwala rozstrzygnąć problem dla dowolnej liczby kolorów czapeczek i dowolnej liczby krasnoludków.

Dwa dni później przyszedł list od innego Czytelnika artykułu, studenta pierwszego roku matematyki stosowanej na Politechnice Gdańskiej, Marcina Krzywkowskiego, proponujący inne rozwiązanie, też proste i deterministyczne. Propozycja Marcina Krzywkowskiego omija dodatkowe założenie zawarte w rozwiązaniu Jana Błaszczczyńskiego, ale ogranicza się do dwóch rodzajów czapeczek.

Oryginalne zadanie było takie:

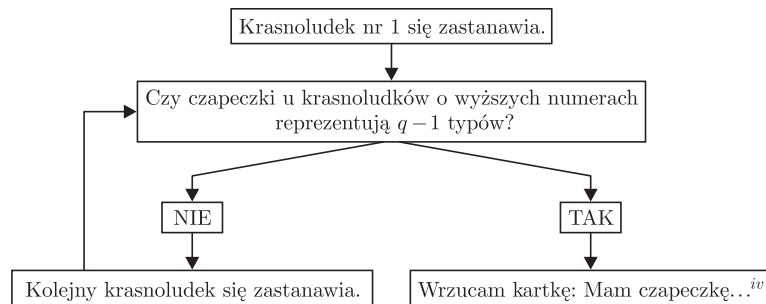
kolegów, ale swojej nie będziecie mogli zobaczyć. Każdy z was dostanie 2 kartki ze swoim imieniem i napisem: **Mam białą czapeczkę** albo **Mam kolorową czapeczkę**. Jeśli któryś z was zechce, powinien wybrać jedną z nich i wrzucić do koszyka na środku sali. Ale pamiętajcie! Nie wolno wam się porozumiewać! Wspaniała nagroda – tu Królowna uśmiechnęła się tajemniczo – będzie wam wręczona, jeśli okaże się, że nikt się nie pomylił, a przynajmniej jedna osoba zgadła, jaką ma czapeczkę na głowie.

Rozwiązania Czytelników Delty

Warunki zadania pozwalają ustalić wcześniej strategię postępowania. W obu rozwiązaniach krasnoludki umawiają się działać „na tempo”. W rozwiązaniu Jana Błaszczczyńskiego tempo wyznacza kolejność, w jakiej krasnoludki będą wrzucać kartki do koszyka. Marcin Krzywkowski proponuje, aby krasnoludki podejmowały działanie co ustalony odcinek czasu, na przykład co 5 sekund.

Jan Błaszczczyński zaproponował rozwiązanie przy dodatkowym założeniu, że na głowach krasnoludków są wszystkie rodzaje czapeczek. *Warunkiem koniecznym do rozwiązania jest ubranie krasnoludków we wszystkie rodzaje czapeczek – skoro Śnieżka przygotowała białe i czerwone czapeczki, to z każdego rodzaju istnieje co najmniej jedna* – pisze autorⁱⁱⁱ. Warunek ten przenosi on na przypadek dowolnej liczby rodzajów czapeczek – ma być reprezentowany każdy spośród q typów czapeczek.

Rozwiązanie to najprościej przedstawić w postaci grafu.



Gdy krasnoludek nr 1 widzi czapeczki $q - 1$ typów, wie, że jego czapeczka ma typ, którego brakuje i daje odpowiedź poprawną. Gdy krasnoludek nr 1 nie wrzuca kartki, to oznacza, że nie widzi $q - 1$ typów czapeczek. Gdyby tych typów było mniej niż $q - 1$, to wraz z jego czapeczką mogłoby być mniej niż q typów, co jest sprzeczne z założeniem, że wszystkie typy czapeczek są reprezentowane. Tak więc na głowach krasnoludków innych niż nr 1 są reprezentowane wszystkie typy. Sytuacja początkowa się powtarza, ale z mniejszą o 1 liczbą krasnoludków. W k -tym kroku albo krasnoludek zobaczy $q - 1$ typów czapeczek, albo wśród $n - k$ pozostałych krasnoludków

^v Na q kroków przed końcem zgadywania.

^{vi} Bez dodatkowego założenia, że wszystkie kolory są reprezentowane.

^{vii} W oryginalnej propozycji jest $n = 7$, ale łatwo zobaczyć, że podane rozwiązanie jest poprawne dla dowolnego n .

^{viii} Pozostali widzą na jego głowie inny kolor. W przeciwnym przypadku przynajmniej jeszcze jeden krasnoludek podszedłby do koszyka.

^{ix} Tak naprawdę wtedy podejną wszystkie krasnoludki.

^x Jeżeli jakiś krasnoludek widzi dokładnie jedną czapkę koloru A, to musi widzieć więcej niż jedną czapkę koloru B. W przeciwnym przypadku, gdy krasnoludek ten widzi jedną czapkę A i jedną czapkę koloru B (a tak może być w przypadku $n = 3$), to jego kolega z czapką A na głowie musiałby widzieć, że pierwszy krasnoludek ma na głowie czapkę A, więc trzeci krasnoludek z czapką B widzi tylko jeden kolor A. A to stanowi sprzeczność z faktem, że każdy widzi co najmniej dwa kolory.

^{xi} Gdyby krasnoludek ten miał czapkę koloru B, to jedyny krasnoludek z czapką A widziałby wyłącznie jeden kolor B, a to stanowi sprzeczność.

^{xii} Rozumowanie jest analogiczne do przedstawionego w kroku 1.

są reprezentowane wszystkie typy czapek. Najpóźniej $(n + 1 - q)$ -ty krasnoludek^v zobaczy u swoich kolegów o wyższych numerach $q - 1$ różnych typów, co kończy zgadywanie.

Podobne w pomysłach rozwiązanie dla dwóch kolorów czapek^{vi} i dowolnej liczby $n > 1$ krasnoludków proponuje Marcin Krzywkowski^{vii}.

Krok 0 (5 sekund od początku)

Do koszyka podchodzą wyłącznie ci, którzy widzą czapki jednego koloru. Są możliwe 3 przypadki:

- Podszedł jeden krasnoludek – wtedy wrzuca kartkę z kolorem innym niż widzi^{viii}.
- Podszedł więcej niż jeden krasnoludek – wtedy każdy z nich wrzuca kartkę z kolorem takim, jak widzi^{ix}.
- Nie podszedł żaden krasnoludek – wtedy każdy krasnoludek widzi co najmniej jedną czapkę każdego koloru.

Krok 1 (10 sekund od początku)

Do koszyka podchodzą wyłącznie ci, którzy widzą dokładnie jedną czapkę koloru A i więcej niż jedną czapkę koloru B^x. Każdy z nich wnioskuje, że ma na głowie czapkę koloru A i taką kartkę wrzuca do koszyka^{xi}.

Jeżeli do koszyka nie podszedł żaden krasnoludek, to każdy z nich widzi co najmniej po dwie czapki każdego koloru.

Krok 2 (15 sekund od początku)

Do koszyka podchodzą wyłącznie ci, którzy widzą dokładnie dwie czapki koloru A i więcej niż dwie czapki koloru B^{xii}. Każdy z nich wnioskuje, że ma na głowie czapkę koloru A i taką kartkę wrzuca do koszyka.

Jeżeli do koszyka nie podszedł żaden krasnoludek, to każdy z nich widzi co najmniej po trzy czapki każdego koloru. Wykonujemy krok 3.

Ogólnie, jeżeli w $k - 1$ kroku do koszyka nie podszedł żaden krasnoludek, to każdy z nich widzi co najmniej po k czapek każdego koloru. I wtedy wykonuje się następujący krok.

Krok k ($5 \cdot (k - 1)$ sekund od początku)

Do koszyka podchodzą wyłącznie ci, którzy widzą dokładnie k czapek koloru A i więcej niż k czapek koloru B. Każdy z nich wnioskuje, że ma na głowie czapkę koloru A i taką kartkę wrzuca do koszyka.

Postępowanie to musi się skończyć sukcesem wcześniej niż w kroku o numerze $(n - 1)/2$.

Dlaczego oryginalne rozwiązanie jest tak skomplikowane?

Oba rozwiązania przysłane przez Czytelników łamią założenie o tym, że podczas zgadywania nie wolno się porozumiewać. Przedstawione rozwiązania pozwalają kolejnym krasnoludkom przekazać swoją wiedzę poprzez fakt wstrzymania się od wrzucania kartek i wykonywanie tych gestów w kolejnych „krokach”. Takie działanie jest z założenia niedozwolone.

To jednak ja nieświadomie sprowokowałem możliwość innej interpretacji założeń. W pierwotnej wersji artykułu każdy krasnoludek miał do wyboru *trzy* kartki: **Mam białą czapkę**, **Mam kolorową czapkę** i **Rezygnuję z odpowiedzi**. Ponadto na dany sygnał każdy z krasnoludków w tym samym czasie musiałby wrzucić do koszyka jedną z trzech kartek.

Złośliwy chochlik namówił mnie, żeby skrócić opis i zamiast polecenia wrzucenia kartki **Rezygnuję z odpowiedzi** zaproponowałem rezygnację z wrzucania. Przy okazji wypadł z tekstu artykułu nakaz jednoczesnego wrzucenia kartek. Dzięki temu poznaliśmy jednak dwa ciekawe rozwiązania nieco innego zadania.

Propozycja

Nie jest znane rozwiązanie dla 3 typów czapek i n krasnoludków. Rozwiązanie Wesołka z artykułu^{xiii} daje prawdopodobieństwo sukcesu $p = 1/3$. Oczekujemy propozycji rozwiązań o jak największym prawdopodobieństwie sukcesu dla 3 typów czapek i n krasnoludków. Na początek dla $n = 3$. Najciekawsze rozwiązania przedstawimy w *Delcie*.

^{xiii} Niech Nieśmiałek wrzuci kartkę **Mam białą czapkę**, a reszta niech wrzuci kartkę **Rezygnuję z odpowiedzi**.