Klub 44

$\otimes\sqrt{\oint\!\!\!\Sigma\,!} = 44$

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2006

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
503 ($WT = 1{,}21$) i **504** ($WT = 2{,}22$)
z numeru 6/2005

Zbigniew Sewartowski	45,16
Marian Łupieżowiec	40,93
Andrzej Jóźwik	40,64
Tomasz Rawlik	5–39,35
Paweł Najman	1–38,28
Zbigniew Galias	1–38,09
Michał Jóźwikowski	38,07
Marcin Kasperski	2–36,86
Janusz Olszewski	7–36,01
Andrzej Daniluk	1–34,80
Adam Dzedzej	31,71
Marek Prauza	3–30,56
Tomasz Wietecha	6–29,76
Leszek Grzanka	29,14
Mieczysław Jędrzejowski	27,23
Paweł Walter	26,78
Jan Czardybon	26,21
Michał Kieza	1–26,15
Krzysztof Kamiński	25,30
Franciszek Sikorski	23,28
Michał Jastrzębski	22,99
Grzegor Karpowicz	22,24
Dariusz Kurpiel	2–22,21
Maciej Mostowski	1–20,04

Witamy kolejnego (101.) członka Klubu 44 M, którym został pan **Zbigniew Sewartowski**.

Legenda (przykładowo): stan konta 7–36,01 oznacza, że uczestnik już siedmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (ósmej) rundzie ma 36,01 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;

– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2003, 2004 lub 2005.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, ktorzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (5), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor (9), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (7), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (6), T. Józefczyk, J. Witkowski (4), W. Bednorz, B. Dyda (4), M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit, J. Cisło (4), W. Bednarek

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 515, 516

Redaguje Marcin E. KUCZMA

515. W ścianę $ABCD$ sześcianu o krawędzi 1 wpisany jest okrąg ω. Wierzchołek E jest końcem krawędzi AE prostopadłej do AB i AD. Okrąg Ω jest opisany na trójkącie BDE. Obliczyć długość najkrótszego odcinka łączącego punkt okręgu ω z punktem okręgu Ω.

516. Rozważamy operację, która uporządkowanej parze dodatnich liczb całkowitych (a,b) przyporządkowuje parę $(a',b') = \begin{cases} (2a,\ b{-}a) & \text{gdy } a<b, \\ (a{-}b,\ 2b) & \text{gdy } a \geqslant b. \end{cases}$ Startujemy od zadanej pary (a_0,b_0) liczb całkowitych dodatnich i powtarzamy algorytm. Przerywamy, gdy pojawi się para liczb, z których jedna jest zerem. Scharakteryzować te pary początkowe (a_0,b_0), dla których algorytm zatrzyma się w skończonym czasie.

Zadanie 516 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/2005

Przypominamy treść zadań:

507. (a) Czy zbiór wszystkich liczb wymiernych większych od 1 można przedstawić jako sumę dwóch zbiorów rozłącznych A, B, co najmniej dwuelementowych tak, aby
• suma dowolnych dwóch różnych liczb ze zbioru A była elementem zbioru A
oraz
• suma dowolnych dwóch różnych liczb ze zbioru B była elementem zbioru B?
(b) To samo pytanie, po zastąpieniu wyrażenia *suma dowolnych dwóch różnych liczb* przez *iloczyn dowolnych dwóch różnych liczb.*

508. Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu. Boki AB, BC, CD, DA są do tego okręgu styczne odpowiednio w punktach K, L, M, N. Odcinki KM i LN przecinają się w punkcie S. Wykazać, że
$$\frac{|KS|}{|MS|} = \frac{|AK|\cdot|BK|}{|AB|}\cdot\frac{|CD|}{|CM|\cdot|DM|}.$$

507. (a) Wykażemy, że nie istnieje rozbicie o podanej własności.

Przypuśćmy bowiem, że istnieje, i weźmy parę różnych liczb $a, a' \in A$ oraz parę różnych liczb $b, b' \in B$. Dla każdej czwórki liczb całkowitych dodatnich k, k', l, l' mamy
$$ka + k'a' \in A, \qquad lb + l'b' \in B$$
(uzasadnienie indukcyjne: jeśli $s = ka + k'a' \in A$, to w myśl podanego warunku $s + a \in A$, $s + a' \in A$; analogicznie dla zbioru B).

Niech q będzie dowolnym wspólnym mianownikiem liczb wymiernych a, a', b, b'. Zachodzi równość $(bq)a + (b'q)a' = (aq)b + (a'q)b'$. Ale, zgodnie z wykazaną własnością, suma po lewej stronie jest elementem zbioru A, a suma po prawej – elementem zbioru B. To daje oczekiwaną sprzeczność, bo zbiory A i B są rozłączne.

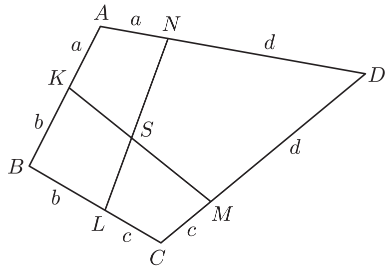
(b) Odpowiedź zmieni się, gdy w rozważanym warunku zastąpimy *sumę* przez *iloczyn.* Oto przykład żądanego rozbicia:
$$A = \{n/p\colon\ n,p \in \mathbf{N},\ n>p;\quad n \text{ nieparzyste},\ p \text{ parzyste}\},$$
$$B = \{l/m\colon\ l,m \in \mathbf{N},\ l>m;\quad m \text{ nieparzyste},\};$$
każdy z tych zbiorów jest zamknięty względem mnożenia.

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, A. Czornik, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, S. Solecki, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Daniluk, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Kieza, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, P. Najman, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, Z. Skalik, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, T. Warszawski, K. Witek, A. Woryna, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

508. Przyjmijmy oznaczenia:
$a = |AN| = |AK|$, $b = |BK| = |BL|$,
$c = |CL| = |CM|$, $d = |DM| = |DN|$.
Weźmy pod uwagę wektory



$$\overrightarrow{SK} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{SA} + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{SB} = \frac{ab}{a+b}\left(\frac{1}{a}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{b}\overrightarrow{SB}\right),$$

$$\overrightarrow{SM} = \frac{d}{c+d}\overrightarrow{SC} + \frac{c}{c+d}\overrightarrow{SD} = \frac{cd}{c+d}\left(\frac{1}{c}\overrightarrow{SC} + \frac{1}{d}\overrightarrow{SD}\right)$$

i zauważmy, że

$$cd(a+b)\overrightarrow{SK} + ab(c+d)\overrightarrow{SM} = = abcd\left(\frac{1}{a}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{b}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{c}\overrightarrow{SC} + \frac{1}{d}\overrightarrow{SD}\right). \tag{1}$$

Przez cykliczne przesunięcie oznaczeń otrzymujemy analogiczną równość

$$da(b+c)\overrightarrow{SL} + bc(d+a)\overrightarrow{SN} = = bcda\left(\frac{1}{b}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{c}\overrightarrow{SC} + \frac{1}{d}\overrightarrow{SD} + \frac{1}{a}\overrightarrow{SA}\right). \tag{2}$$

Lewa strona wzoru (1) przedstawia wektor równoległy do $\overrightarrow{SK}$, a lewa strona (2) – wektor równoległy do $\overrightarrow{SL}$. Ale wektory $\overrightarrow{SK}$ i $\overrightarrow{SL}$ nie są równoległe, a prawe strony (1) i (2) są równe. Stąd wniosek, że zarówno wektor (1), jak i wektor (2) – to wektor zerowy. W szczególności więc

$$cd(a+b)\overrightarrow{SK} = -ab(c+d)\overrightarrow{SM}$$

i wystarczy przyrównać długości tych wektorów, aby otrzymać tezę zadania:

$$|CM| \cdot |DM| \cdot |AB| \cdot |SK| = |AK| \cdot |BK| \cdot |CD| \cdot |SM|.$$

Co ciekawego w lidze matematycznej? Niewątpliwym hitem minionego sezonu było ukończenie dziewiątej rundy przez jednego z uczestników. Przypomnijmy: członkiem *Klubu 44* zostaje się po zgromadzeniu 44 punktów. Te czterdziestkiczwórki można dowolnie wiele razy powtarzać... Przez długie lata niekwestionowanym liderem był **Jerzy Janowicz** z Bolesławca, który już pod koniec roku 1993 zamknął ósme okrążenie. Długo czekaliśmy, by ktoś wykonał dziewięć rund. Zrobił to **Piotr Kumor** z Olsztyna. Serdecznie gratulujemy! Oczekujemy kontynuacji (po n-tym okrążeniu zawsze przecież może być (n+1)-sze) i zapraszamy innych uczestników do podjęcia tego współzawodnictwa.

Matematyczny *Klub 44* liczy już przeszło setkę. Z numerami 99, 100, 101 weszli: **Michał Kieza** z Warszawy, **Tomasz Warszawski** z Krakowa, **Zbigniew Sewartowski** z Wieliczki.

Przejdźmy do zadań. Jest o czym mówić; było w tym roku kilka zadań rzetelnie trudnych. Spora w tym zasługa (a może raczej: za to odpowiedzialność) właśnie naszego (9×44)-laureata **P. Kumora**, autora fascynujących zadań **492** i **500**, nie tylko trudnych, ale i eleganckich w treści. Jak zobaczymy z omówienia, klasą dla siebie wśród rozwiązujących był **Jerzy Cisło** z Wrocławia – rozwiązał bezbłędnie wszystkie 20 zadań, w tym jako jedyny (!) geometryczne zadanie **501** (które wbrew oczekiwaniu i zamierzeniu redaktora ligi okazało się najtrudniejsze).

Omówienie rozwiązań będzie skrótowe; na pełne uzasadnienia wszystkich kroków potrzeba by było znacznie więcej miejsca. Czytelników, których to czy inne zadanie zainteresuje, zachęcamy do samodzielnego uzupełnienia pominiętych szczegółów.

Zadanie **490.** [Ile jest permutacji π zbioru $\{1,\ldots,n\}$ o własności $|\pi(i{+}1) - \pi(i)| > 1$, gdy $n = 15$?] (współczynnik trudności WT=2,61; liczba poprawnych rozwiązań LPR=4). Rozwiązanie firmowe to był zestaw kilku wymyślnych rekurencji. **P. Kumor** znalazł dwie z nich, co pozwoliło zredukować problem do numerycznego przebadania permutacji zbioru 13-elementowego. **Z. Galias** zaatakował problem numerycznie od razu dla $n = 15$, też z powodzeniem. Bardziej elegancka metoda była oparta na wzorze włączeń i wyłączeń; tą metodą rozwiązali zadanie **J. Cisło** i **J. Olszewski**:

Jeśli $A_i = \{\pi \in \Omega\colon |\pi(i{+}1) - \pi(i)| = 1\}$ $(i = 1,\ldots,n{-}1)$, gdzie Ω jest zbiorem wszystkich permutacji zbioru $\{1,\ldots,n\}$, to

$$\left|\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| = \left|\Omega\right| + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k a_k,$$

$$a_k = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \left|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right|.$$

Gdy indeksy $i_1,\ldots,i_k$ tworzą j rozdzielonych bloków spójnych, to (nietrudno zobaczyć, że)

$$\left|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right| = 2^j(n-k)!.$$

Na ile sposobów można wybrać indeksy $i_1 < \ldots < i_k$ tak, aby mieć j rozdzielonych bloków? Ciąg $(0,1,\ldots,n{-}1,n)$ rozbijamy na $2j{+}1$ niepustych bloków, numerując je kolejno od lewej strony tak, żeby suma bloków o numerach parzystych była zbiorem k-elementowym – ta suma da zbiór indeksów. Problem sprowadza się do podziału liczby k na j niezerowych składników oraz (niezależnie) liczby $n{+}1{-}k$

na $j{+}1$ niezerowych składników; wynikiem jest iloczyn $\binom{k-1}{j-1}\binom{n-k}{j}$. Stąd ostateczny wynik

$$\Big|\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big| = n! + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(n-k)!\sum_{j\geqslant 1}\binom{k-1}{j-1}\binom{n-k}{j}2^j,$$

który dla $n = 15$ daje wartość liczbową 175 203 184 374. Ciekawe, czy wzór ogólny da się zwinąć do bardziej zwartej postaci...

Zadanie **492.** [Dane $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma > 0$; $S_k = a^k + b^k + c^k$, $T_k = \alpha^k + \beta^k + \gamma^k$; $S_1 = T_1$, $S_2 = T_2$, $S_3 > T_3 \Rightarrow S_n > T_n$ dla $n > 3$] (WT=3,59; LPR=2). Autor zadania, **Piotr Kumor**, udowodnił tę implikację stosując mnożniki Lagrange'a (w $\mathbb{R}^6$ – pracochłonne badanie licznych konfiguracji brzegowych). Rozwiązanie firmowe pochodzi od redaktora ligi. Dwa dowody znalezione przez uczestników konkursu są jeszcze całkiem odmienne, i chyba zgrabniejsze.

Jerzy Cisło wprowadził funkcje tworzące

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k, \qquad T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k x^k$$

oraz pomocnicze wielomiany

$$(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x) =: H(x),$$
$$(1-ax)(1-bx)(1-cx) = H(x) - \lambda x^3,$$
$$\lambda = abc - \alpha\beta\gamma > 0,$$

i uzyskał tożsamość

$$S(x) = T(x)F(x),$$

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m H(x)^{-m} x^{3m} =: \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n;$$

współczynniki F_n są nieujemne (co wynika z potęgowego rozwinięcia $(1-\alpha x)^{-1}$), przy czym $F_0 = 1$, $F_1 = F_2 = 0$, $F_3 = \lambda > 0$; zatem dla $n > 3$

$$S_n = F_0 T_n + F_3 T_{n-3} + (F_4 T_{n-4} + \ldots + F_n T_0) \geqslant$$
$$\geqslant T_n + \lambda T_{n-3} > T_n.$$

To podejście bardzo profesjonalne. Znacznie bardziej elementarne rozwiązanie przedstawił **Paweł Najman**:

Dla ustalonych wartości $S_1 = T_1$, $S_2 = T_2$ niech J będzie zbiorem tych wartości „parametru” x, dla których układ równań $x + y + z = S_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = S_2$ ma rozwiązanie y, z, spełniające warunek $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$; zbiór J okazuje się być przedziałem, a niewiadome y, z są dla $x \in J$ dane wzorami

$$y(x) = \frac{1}{2}\big(S_1 - x + \sqrt{\Delta}\big),\ z(x) = \frac{1}{2}\big(S_1 - x - \sqrt{\Delta}\big),$$

gdzie $\Delta = -3x^2 + 2S_1x - S_1^2 + 2S_2$. Przyjmując, że $a \geqslant b \geqslant c$, $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$, mamy $y(a) = b$, $z(a) = c$, $y(\alpha) = \beta$, $z(\alpha) = \gamma$. Niech

$$f_n(x) = x^n + y(x)^n + z(x)^n \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},\ x \in J.$$

Funkcje $f_1 \equiv S_1$, $f_2 \equiv S_2$ są stałe, więc $y' + z' = -1$, $yy' + zz' = -x$; korzystając z tych równań można stwierdzić (rachunki), że $f_n' > 0$ wewnątrz J dla $n \geqslant 3$. Z warunku zadania $f_3(a) > f_3(\alpha)$; stąd $a > \alpha$, więc $f_n(a) > f_n(\alpha)$ dla wszystkich $n \geqslant 3$, czyli $S_n > T_n$.

Zadanie **493.** [Wielościan wypukły, krawędzie 2-kolorowane $\Rightarrow \exists$ wierzchołek, wokół niego $\leqslant 2$ zmiany koloru] (WT=2,71; LPR=3). Jak nam uświadomił **J. Cisło**, to twierdzenie znajduje się w książce M. Aigner, G. M. Ziegler *Dowody z Księgi.* Tam na stronie 80 znajdą Czytelnicy prosty dowód, oparty na wzorze Eulera (zgrabniejszy niż indukcyjne rozwiązanie firmowe). Dokładnie taki sam dowód przedstawili autorzy pozostałych dwóch dobrych rozwiązań **J. Olszewski** i **T. Warszawski**.

Zadanie **498.** [$a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 1$; $a_i \in \mathbb{N}$, $\sum a_i = 2n$; $a_{i_1} + \ldots + a_{i_k} \neq n$ dla $i_1 < \ldots < i_k \Rightarrow (a_1, \ldots, a_n) =?$] ($WT$=2,58; LPR=12). Większość rozwiązań – à la firmowe, lub indukcyjny dowód tezy ($a_2 = 1$ lub $a_n > 1$). Na uwagę zasługuje prostsze rozumowanie, które przeprowadzili **K. Dorobisz**, **M. Kieza**, **T. Warszawski**:

Niech $s_k = a_1 + \ldots + a_k$; rozważamy n liczb a_1, a_n, $a_n{+}s_1$, $a_n{+}s_2$, ..., $a_n{+}s_{n-2}$; z założeń wynika, że są one niepodzielne przez n oraz że usunięcie jednej z pierwszych dwóch liczb (a_1 lub a_n) daje układ $n{-}1$ liczb parami różnych (mod n). Stąd wniosek, że $a_1 \equiv a_n$ (mod n), więc albo $a_1 = a_n + n$, albo $a_1 = a_n$; pierwsza możliwość wyznacza ciąg $(n{+}1, 1, 1, \ldots, 1)$, a druga $(2, 2, \ldots, 2)$ (dobry, gdy n nieparzyste).

Zadanie **500.** [Znaleźć liczbę $n \in \mathbb{N}$ (im mniejsza tym lepiej) o własności:
$\forall\, A \subset \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}{\times}\mathbb{Z}$ $(|A| = n)$ $\exists\, a_1, \ldots, a_5 \in A$:
$\frac{1}{5}(a_1 + \ldots + a_5) \in \mathbb{Z}^2)$] ($WT$=3,12; LPR=?). Trudno tu mówić o „poprawnych rozwiązaniach”, bo w zadaniu chodziło o podanie *jakiegokolwiek* „dobrego” n.
W rozwiązaniu firmowym pokazano, że $n = 16$ jest za małe oraz że dobre są np. $n = 101$ (trywialnie), $n = 41$ (też dość łatwo). Te dwie wartości wskazywali na ogół rozwiązujący. Autor zadania **Piotr Kumor** wykazał, że $n = 33$ jest dobre. Liczyliśmy na poprawienie tego wyniku przez uczestników ligi. I nie zawiedliśmy się!

Jerzy Cisło wykazał, że $n = 17$ jest dobre – uzyskał zatem wartość optymalną. Taka teza nietrudno wynika z następującego lematu: *W zbiorze* $\mathbb{Z}_5^2 = \{0,1,2,3,4\} \times \{0,1,2,3,4\}$ *każdy z niżej wypisanych ciągów zawiera pięciowyrazowy podciąg o sumie zerowej* (mod $(5,5)$) *(różne litery oznaczają dowolne różne punkty zbioru* $\mathbb{Z}_5^2$*)*
$(a, a, b, b, c, c, d, d, e, e)$,
$(a, a, a, b, b, b, c, c, c, d, d, d, e)$,
$(a, a, a, b, b, b, c, c, c, d, d, e, f, g)$,
$(a, a, a, b, b, b, c, c, c, d, e, f, g, h)$,
$(a, b, c, d, e, f, g, h, i)$.
Autor pracy przyznał, że dla ciągu tej ostatniej postaci ma jedynie uzasadnienie numeryczne; dla pozostałych – również teoretyczne (wiele przypadków), choć oczywiście i one dadzą się sprawdzić komputerowo (w czasie bliskim zeru).

Można rozważać analogiczne zagadnienie w $\mathbb{Z}_m^2$, dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ (u nas $m = 5$). Hipotezę A. Kemnitza (1983) głoszącą, że $\min n = 4m - 3$, udowodnili (2003) niezależnie dwaj młodzi matematycy: C. Reiher oraz C. di Fiore (o czym dowiedzieliśmy się niedawno). Dla wyższych wymiarów ($\mathbb{Z}_m^d$, $d > 2$) problem jest otwarty.

Zadanie **501.** [Współśrodkowe okręgi Ω, ω (promienie $R > r$); czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω; półproste $AB^{\rightarrow}$, $BC^{\rightarrow}$, $CD^{\rightarrow}$, $DA^{\rightarrow}$ w przecięciu z Ω wyznaczają drugi czworokąt; stosunek obwodów tych czworokątów $= R/r$; obliczyć te obwody] (WT=3,75; LPR=1). Trudność tego zadania zdecydowanie przerosła oczekiwania! Jedyne pełne rozwiązanie (**J. Cisło**) nie różniło się w sposób istotny od firmowego.

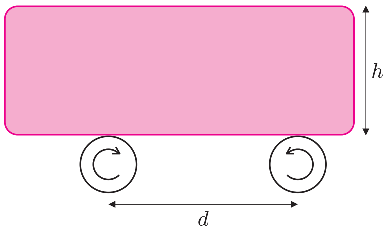
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2006

Zadania z fizyki nr 412, 413

Redaguje Jerzy B. BROJAN

412. Proces fermentacji win musujących trwa jeszcze – jak wiadomo – po rozlaniu ich do butelek i zakorkowaniu, przy czym powstaje mętny osad, który usuwa się na ostatnim etapie produkcji wina. Dokonuje się tego następująco: butelka jest wtedy przechowywana szyjką do dołu, zatem osad skupia się w szyjce. Szyjkę tę się zamraża, tak że przy korku powstaje warstwa lodu, odwraca się butelkę do pozycji normalnej, wyciąga korek wraz z lodem i zawartym w nim osadem i korkuje butelkę ponownie. Wino jest wtedy już nasycone dwutlenkiem węgla pod ciśnieniem. Dlaczego więc przy otwieraniu butelki wino się nie pieni i nie „ucieka” z butelki, tak jak podczas zwykłego otwarcia?



413. Na dwóch walcach obracających się w przeciwne strony położono jednorodny klocek (rys.) tak, że jego środek był początkowo nieco bliżej jednego z walców. Odległość osi walców jest równa d, wysokość klocka – h, a współczynnik tarcia walców o klocek – f. Podać warunki, przy których ruch klocka jest harmoniczny i obliczyć okres drgań.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/2005

Przypominamy treść zadań:

404. Istnieją dwa różne mechanizmy fizyczne i fizjologiczne dające efekt słyszenia przestrzennego (określania kierunku fali dźwiękowej), przy czym jeden z nich działa głównie dla częstotliwości powyżej około 5 kHz, a drugi głównie dla częstotliwości poniżej około 2 kHz. Na czym polegają te dwa mechanizmy i dlaczego mają ograniczone zakresy działania?

405. Opór przewodu na jednostkę długości jest równy ρ. Przewodem tym przesłano prąd na odległość l do odbiornika o oporze R, przy czym drugi przewód jest bezoporowy (można przyjąć, że jest nim ziemia). Obliczyć sprawność przesyłu energii, jeśli przewodnictwo między przewodami (odwrotność oporu) na jednostkę długości jest równe σ.

404. Zmysł słuchu może reagować na różnicę natężeń dźwięku dobiegającego do uszu lub na różnicę faz. Pierwszy mechanizm działa silniej dla fal krótkich, których ugięcie na głowie jest słabsze, natomiast drugi – silniej dla fal długich. Przykładowo, dla dźwięku o częstotliwości 5 kHz długość fali wynosi około 7 cm, co oznacza, że przesunięcie fazy między sygnałami odbieranymi przez oboje uszu jest zbyt duże i zbyt silnie zależne od częstotliwości, aby system nerwowy mógł je łatwo przeanalizować.

405. Zarówno natężenie prądu I, jak i napięcie U, są zmiennymi – funkcjami odległości x od źródła zasilania. Oporność przewodu powoduje na odcinku $\mathrm{d}x$ spadek napięcia zgodnie ze wzorem $\mathrm{d}U = -I\rho\mathrm{d}x$, a przepływ prądu między przewodami powoduje spadek natężenia prądu według wzoru $\mathrm{d}I = -U\sigma\mathrm{d}x$. Rozwiązaniem tego układu równań różniczkowych są funkcje

$$U = U_1\mathrm{e}^{\lambda x} + U_2\mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad I = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}(U_2\mathrm{e}^{-\lambda x} - U_1\mathrm{e}^{\lambda x})$$

gdzie $\lambda = \sqrt{\rho\sigma}$. W punkcie $x = 0$ napięcie jest równe napięciu źródła U_0, a w punkcie $x = l$ (przy odbiorniku) nakładamy warunek $U = IR$. Stąd po przekształceniach otrzymujemy

$$U_1 = \frac{U_0(\kappa - 1)}{\mathrm{e}^{2\lambda l}(\kappa + 1) + \kappa - 1}, \quad U_2 = \frac{U_0(\kappa + 1)}{\mathrm{e}^{-2\lambda l}(\kappa - 1) + \kappa + 1}$$

gdzie wprowadzono bezwymiarowy parametr $\kappa = R\sqrt{\sigma/\rho}$. Moc źródła jest równa

$$P_0 = U_0 I_0 = U_0^2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}\,\frac{\mathrm{e}^{2\lambda l}(\kappa + 1) - (\kappa - 1)}{\mathrm{e}^{2\lambda l}(\kappa + 1) + \kappa - 1}$$

Podobnie obliczamy moc odbiornika

$$P = U_0^2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}\,\frac{4\kappa\mathrm{e}^{2\lambda l}}{(\mathrm{e}^{2\lambda l}(\kappa + 1) + \kappa - 1)^2}$$

Ostatecznie sprawność wynosi

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{4\kappa}{\mathrm{e}^{2\lambda l}(\kappa + 1)^2 - \mathrm{e}^{-2\lambda l}(\kappa - 1)^2}$$

A teraz omówienie wybranych zadań z ostatniego rocznika.

Zadanie **384** [Obliczenie masy Księżyca na podstawie wysokości pływów] (współczynnik trudności $WT = 1{,}30$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 5$). Problem ten nie jest, ma się rozumieć, całkowicie oryginalny, dlatego **M. Łącki** mógł posłużyć się rozwiązaniem zawartym w podręczniku Szczeniowskiego, a **K. Kapcia** – oprzeć się na artykule M. Korzyńskiego z Delty 1/2004. Autorem trzeciego bezbłędnego rozwiązania był **A. Idzik**, a dobre odpowiedzi przysłali także **J. Witkowski** i **Oliwia Madej**.

Zadanie **389** [Wyznaczyć moment maksymalnego zbliżenia źródła dźwięku na podstawie przebiegu odbieranej częstotliwości] ($WT = 3{,}21$, $LPR = 0$). W treści zadania pominięty został warunek, że źródło porusza się ruchem jednostajnym. Nie każde przeoczenie autora może skorygować „fizyczny zdrowy rozsądek”, którego tak zazdrościł p. Marcin Kuczma fizykom w swoim omówieniu ligi matematycznej rok

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 401 zadaniach

Zbigniew Galias	– Kraków	42,38
Jerzy Witkowski	– Radlin	41,14
Tomasz Rudny	– Warszawa	31,48
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	30,22
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	1 - 29,30
Mateusz Łącki	– Kraków	28,77
Konrad Kapcia	– Częstochowa	25,19
Tomasz Wietecha	– Tarnów	5 - 19,44
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	6 - 17,43
Tomasz Tkocz	– Rybnik	17,37
Michał Jóźwikowski	– Błonie	14,77
Leszek Grzanka	– Chechło	14,03
Piotr Kumor	– Olsztyn	13,92
Jacek Konieczny	– Poznań	13,38
Piotr Ładyżyński	– Michalin	10,21
Kazimierz Gryszko	– Gliwice	9,18
Radosław Poleski	– Kołobrzeg	8,65
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	2 - 7,45

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2003–2005 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 7 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

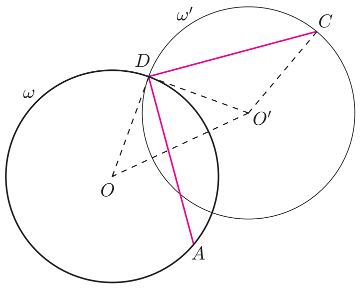
temu (kiedy to zabrakło pewnego oczywistego, a niezbędnego warunku w treści jednego z zadań). Na szczęście, nie to okazało się główną przyczyną trudności. Najwyższe oceny uzyskali **K. Kapcia** i **J. Witkowski**, nie przekraczając jednak bariery połowy punktów.

Zadanie **393** [Szybkość spadania magnesów w rurze miedzianej] ($WT = 3{,}33$, $LPR = 1$). Zadanie to stało się powodem dłuższej dyskusji w redakcji Delty, a przeprowadzone doświadczenia pozwoliły uniknąć nadmiernych uproszczeń w rozwiązaniu początkowo przewidzianym do druku (dziękuję kol. Piotrowi Zalewskiemu za wnikliwą krytykę). Dodatkowe doświadczenia ukazały jeszcze jedną niewymienioną poprzednio subtelność: gdy liczba połączonych magnesów jest dobrana tak, aby spadały szczególnie wolno, istnieje taka grubość rozdzielającej je przekładki, z którą te magnesy spadają najszybciej, w szczególności szybciej niż bez przekładki i szybciej niż dwie połówki oddzielnie (które można uważać za części rozdzielone przekładką nieskończenie grubą). Sądzę, że wyjaśnienie tego efektu wymaga tylko przywołania dwóch konkurujących mechanizmów wskazanych w rozwiązaniu z Delty 6/2005: złączone magnesy wytwarzają silniejsze pole przy biegunach (tzn. z zewnętrznej strony), a rozsunięte na dużą odległość mają za to faktycznie cztery bieguny zamiast dwóch. Najwidoczniej istnieje takie rozsunięcie magnesów, które znacząco osłabia zewnętrzne bieguny nie pozwalając jeszcze efektywnie działać biegunom wewnętrznym. Jedyne dobre rozwiązanie tego zadania przysłał **K. Kapcia**.

Zadanie **394** [Domek z kart] ($WT = 3{,}10$, $LPR = 2$). Oto zdumiewający przykład „wahnięcia” współczynnika trudności – zadanie było łatwe i standardowe, a wyniki okazały się gorsze od wielu nieporównanie trudniejszych! Autorem bezbłędnego rozwiązania jest **T. Tkocz**, a dobrego – **M. Łupieżowiec**.

Weterani Klubu 44 F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):
P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (6), T. Wietecha (5), J. Łazuka, M. Wójcicki
(jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44F (alfabetycznie):
„dwukrotni”: J. Lipkowski, A. Nowogrodzki, P. Perkowski;
„jednokrotni”: A. Borowski, P. Gadziński, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, J. Piotrowski, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, P. Wach.



Rozwiązanie zadania M 1125.
Bez straty ogólności możemy założyć, że punkt D jest ustalony, tzn. jedynym punktem okręgu ω zmieniającym położenie jest punkt A (rys.). Punkt C otrzymujemy obracając punkt A wokół punktu D o 90°. Zatem wierzchołek C każdego spośród rozpatrywanych kwadratów leży na okręgu ω', który powstaje z okręgu ω przez obrót o 90° wokół punktu D. Zadanie sprowadza się tym samym do wyznaczenia odległości od punktu O do najdalszego punktu okręgu ω'. Bez trudu stwierdzamy, że odległość ta wynosi $OO' + 1 = \sqrt{2} + 1$, gdzie O' oznacza środek okręgu ω'.

Rozwiązanie zadania F 661.
Niech f_1 i f_2 oznaczają ogniskowe soczewek dla światła czerwonego. Ze wzoru na ogniskową cienkiej soczewki wiemy, że ogniskowe dla światła niebieskiego wynoszą odpowiednio

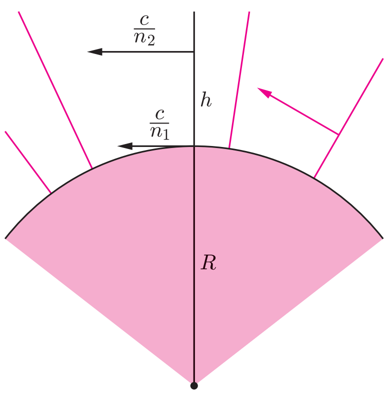
$$f_1 \frac{n_1 - 1}{n_1 + \Delta n_1 - 1} \quad \text{oraz} \quad f_2 \frac{n_2 - 1}{n_2 - \Delta n_2 - 1}.$$

Stąd ogniskowa układu bardzo blisko położonych soczewek to $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ dla światła czerwonego i

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1}\left(1 + \frac{\Delta n_1}{n_1 - 1}\right) + \frac{1}{f_2}\left(1 - \frac{\Delta n_2}{n_2 - 1}\right)$$

dla niebieskiego. Z tych wzorów obliczamy, że

$$f_1 = f\left(1 + \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1}\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}\right) \quad \text{i} \quad f_2 = f\left(1 + \frac{n_1 - 1}{n_2 - 1}\frac{\Delta n_2}{\Delta n_1}\right).$$



Rozwiązanie zadania F 662.
Niech $R = 6400$ km oznacza promień Ziemi. Aby promienie były zaginane zgodnie z krzywizną Ziemi, czoła fali muszą poruszać się jak na rysunku, czyli prędkość światła musi być proporcjonalna do odległości od środka Ziemi. Wtedy opóźnienie dolnej części powierzchni czoła fali w stosunku do górnej jest odpowiednie, by zagiąć tor fali: $\frac{c_2}{R+h} = \frac{c_1}{R}$. Stąd $n_2 = n_1 \frac{R}{R+h}$. Wstawiając wzór na współczynnik załamania dostajemy

$$1 + \frac{1003}{A} - \frac{T}{B} = \frac{6400}{6400,1} \cdot \left(1 + \frac{1013}{A}\right),$$

a po obliczeniu $T = 10$ °C.
Takie warunki – wzrost temperatury o 10 °C na 100 m wysokości – są niezwykle rzadkie, ale mogą prowadzić do ciekawych zjawisk, jak obrazy budowli, świateł lub gór znajdujących się za horyzontem.