

Wstęp

Istnieje w fizyce wiele zagadnień, które – choć w zasadzie proste pojęciowo – prowadzą do znacznych trudności przy ich opisie matematycznym. Na przykład: aby omówić ilościowo ruch kulki na sprężynie, czyli oscylatora harmonicznego, wystarczy znajomość funkcji sinus. Ale do opisu wahadła matematycznego, czyli ciężarka zawieszono na nitce, trzeba znać całki eliptyczne. Podobnie – przy dyfrakcji na szczelinie zależność natężenia światła od kąta odchylenia wyraża się przez funkcje elementarne – czyli po prostu przez $\sin^2 x/x^2$. Ale aby opisać analitycznie dyfrakcję światła na otworze kołowym, trzeba znać funkcje Bessela. I tak dalej.

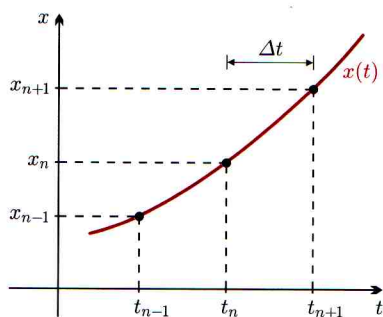
W bardzo wielu takich przypadkach można jednak podać numeryczny opis zagadnień, stosując proste algorytmy i ogólnie dostępne programy. Zastosujemy teraz ten sposób do rozwiązywania newtonowskich równań ruchu.

Numeryczne obliczanie przyspieszenia, sposób nienaukowy

Przypuśćmy na początek, że zależność położenia ciała w jednowymiarowym układzie współrzędnych x od czasu t opisana jest funkcją $x(t)$. Interesować nas będą trzy położenia w wybranych chwilach, równo oddalonych od siebie o Δt (rys. 1):

- położenie w chwili $t_{n-1} = (n-1)\Delta t$, czyli $x_{n-1} \equiv x(t_{n-1})$,
- położenie x_n w chwili $t_n = n\Delta t$,
- położenie x_{n+1} w chwili $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$.

Chcemy obliczyć przyspieszenie ciała w chwili t_n , czyli wielkość a_n .



Rys. 1. Obliczanie przyspieszenia ciała w chwili t_n .

Najpierw jednak musimy obliczyć prędkości. Średnia prędkość w przedziale czasu pomiędzy t_{n-1} a t_n jest bliska prędkości chwilowej w środku przedziału, czyli w czasie $t_{n-\frac{1}{2}} = (n-\frac{1}{2})\Delta t$ (wątpiącym przypominamy twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej). Napišemy więc

$$(1) \quad v_{n-\frac{1}{2}} \approx \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t}.$$

Podobnie średnia prędkość w przedziale czasu pomiędzy t_n a t_{n+1} jest bliska prędkości chwilowej w czasie $t_{n+\frac{1}{2}} = (n+\frac{1}{2})\Delta t$:

$$(2) \quad v_{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t}.$$

Za pomocą wzorów (1) i (2) możemy obliczyć interesujące nas przyspieszenie:

$$(3) \quad a_n = \frac{v_{n+\frac{1}{2}} - v_{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} - \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n}{\Delta t^2}.$$

Podsumujmy: jeżeli znamy położenia ciała w trzech kolejnych równo odległych chwilach, za pomocą wzoru (3) możemy w przybliżeniu obliczyć przyspieszenie ciała w chwili środkowej.

Numeryczne obliczanie przyspieszenia, sposób naukowy

Przedstawiony powyżej prymitywny sposób wprowadzenia wyrażenia na przyspieszenie możemy oczywiście unaukować. Przyspieszenie jest drugą pochodną położenia względem czasu $x''(t)$. Napišemy rozkład funkcji $x(t)$ na szereg Taylora w okolicy chwili t_n :

$$(4) \quad x_{n+1} \equiv x(t_n + \Delta t) = x(t_n) + \frac{x'(t_n)}{1!}\Delta t + \frac{x''(t_n)}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{x'''(t_n)}{3!}(\Delta t)^3 + \dots = x(t_n) + x'(t_n)\Delta t + \frac{1}{2}x''(t_n)(\Delta t)^2 + \frac{1}{6}x'''(t_n)(\Delta t)^3 \dots$$

Podobnie

$$(5) \quad x_{n-1} \equiv x(t_n - \Delta t) = x(t_n) - \frac{x'(t_n)}{1!}\Delta t + \frac{x''(t_n)}{2!}(\Delta t)^2 - \frac{x'''(t_n)}{3!}(\Delta t)^3 + \dots = x(t_n) - x'(t_n)\Delta t + \frac{1}{2}x''(t_n)(\Delta t)^2 - \frac{1}{6}x'''(t_n)(\Delta t)^3 \dots$$

Po zsumowaniu tych wyrażeń dostaniemy (człony z nieparzystymi potęgami Δt się redukują)

$$(6) \quad x_{n+1} + x_{n-1} \approx 2x(t_n) + x''(t_n)(\Delta t)^2.$$

Stąd natychmiast wynika wzór (3).

II zasada dynamiki i algorytm obliczeń numerycznych

W ramach mechaniki klasycznej przyspieszenie ciała a jest proporcjonalne do działającej siły F , co zapisujemy w postaci

$$(7) \quad F = ma,$$

gdzie m jest masą ciała. Dla chwili t_n napišemy więc

$$(8) \quad F_n = ma_n,$$

czyli

$$(9) \quad F_n = ma_n = m \frac{x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n}{\Delta t^2}.$$

*Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

Po prostych przekształceniach dostaniemy

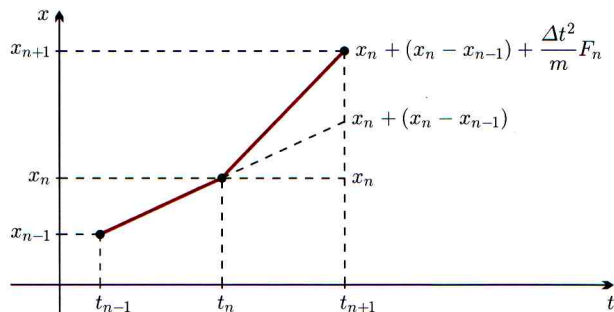
$$(10) \quad x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n = \frac{\Delta t^2}{m} F_n,$$

a stąd

$$(11) \quad x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + \frac{\Delta t^2}{m} F_n.$$

Wzór ten może stanowić podstawę numerycznego obliczania zależności położenia od czasu dla dowolnego jednowymiarowego ruchu. Jeżeli znamy położenia w chwilach t_{n-1} i t_n , oraz wartość siły F_n w chwili t_n , możemy obliczyć położenie ciała w chwili t_{n+1} . Możemy więc prowadzić obliczenia krok po kroku, dla kolejnych wartości n . Wzór (11) ma prostą interpretację, którą zauważymy, przekształcając go do postaci

$$(12) \quad x_{n+1} = x_n + (x_n - x_{n-1}) + \frac{\Delta t^2}{m} F_n.$$



Rys. 2. Graficzna interpretacja wzoru (12).

Gdyby siła F_n była równa zero, przyrost wartości x pomiędzy czasem t_n a t_{n+1} byłby taki sam, jak pomiędzy czasami t_{n-1} i t_n . Wykres byłby linią prostą, mielibyśmy do czynienia z ruchem jednostajnym. Istnienie ostatniego członu we wzorze (12) zakrzywia wykres zależności $x(t)$: ku górze, jeżeli F_n jest dodatnie, ku dołowi, jeżeli F_n jest ujemne.

Warunki początkowe

Aby rozpocząć rachunek krok po kroku w oparciu o wzór (11), musimy w zasadzie znać x_0 i x_1 . Zwykle jednak wygodniej wybrać inną parę wielkości początkowych:

1. położenie w chwili zero, czyli x_0 ,
2. prędkość w chwili zero, czyli v_0 .

Aby obliczyć x_1 , mówimy: w krótkim przedziale czasu Δt działająca siła mało się zmienia. Ruch możemy więc potraktować jako jednostajnie przyspieszony ze stałym przyspieszeniem $a_0 = F_0/m$. Wynika stąd wyrażenie na x_1

$$(13) \quad x_1 = x_0 + v_0 \Delta t + \frac{F_0 \Delta t^2}{2m}.$$

Siła zależna od położenia

W dalszym ciągu ograniczymy się do przypadku, kiedy siła zależy tylko od położenia x , czyli $F_n = F(x_n)$. Wtedy algorytm obliczeniowy ma postać:

$$(14) \quad x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + \frac{\Delta t^2}{m} F(x_n),$$

z dodatkowym wzorem (13) na x_1 . Zastosujemy go do dwóch przypadków:

1. oscylatora harmonicznego – aby sprawdzić, jak algorytm działa;
2. prostego oscylatora anharmonicznego.

Obliczenia przeprowadzone zostały za pomocą ogólnie dostępnego programu *Excel* (powszechnie potępianej firmy *Microsoft*).

Oscylator harmoniczny

Jak wiadomo, dla oscylatora harmonicznego siła jest – z przeciwnym znakiem – proporcjonalna do wychylenia:

$$(15) \quad F(x) = -kx,$$

Dla warunku początkowego $v_0 = 0$ zależność położenia od czasu opisana jest funkcją

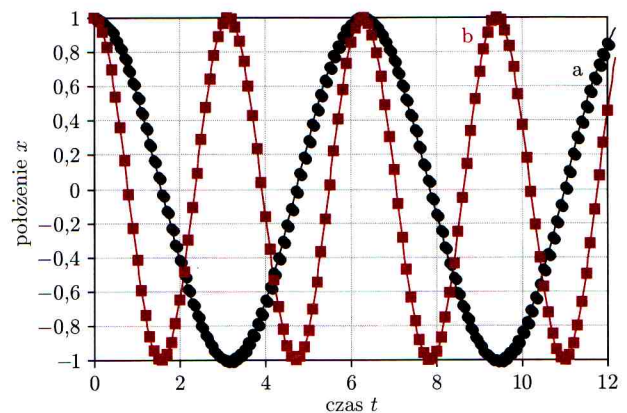
$$(16) \quad x(t) = A \cos(\omega t).$$

Częstość kołowa ω dana jest wzorem

$$(17) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

i nie zależy od amplitudy drgań. W szczególności dla $k = 1$ i $m = 1$ także $\omega = 1$, a $T = 2\pi/\omega = 2\pi$.

Program *Harmoniczny* służy do numerycznego obliczania zależności położenia od czasu dla oscylatora harmonicznego. Można dowolnie wybrać masę oscylatora m , stałą sprężystości k , krok prowadzonych obliczeń Δt , położenie początkowe x_0 i prędkość początkową v_0 . Aby można było porównać dwa zestawy parametrów, w programie obok siebie zostały umieszczone dwie identyczne kolumny obliczeniowe. Wyniki obu serii obliczeń zostały umieszczone na wspólnym wykresie. Można stwierdzić, że rachunki numeryczne odtwarzają z rozsądną dokładnością wszystkie własności oscylatora harmonicznego (rys. 3).



Rys. 3. Obliczona numerycznie zależność położenia od czasu dla oscylatora harmonicznego. Dwa zestawy parametrów:

- a. $k = 1$, $m = 1$, $x_0 = 1$ i $v_0 = 0$;
- b. $k = 4$, $m = 1$, $x_0 = 1$ i $v_0 = 0$.

Oscylator anharmoniczny

Jako przykład drugi rozważymy oscylator anharmoniczny, dla którego siła zależy od wychylenia jak

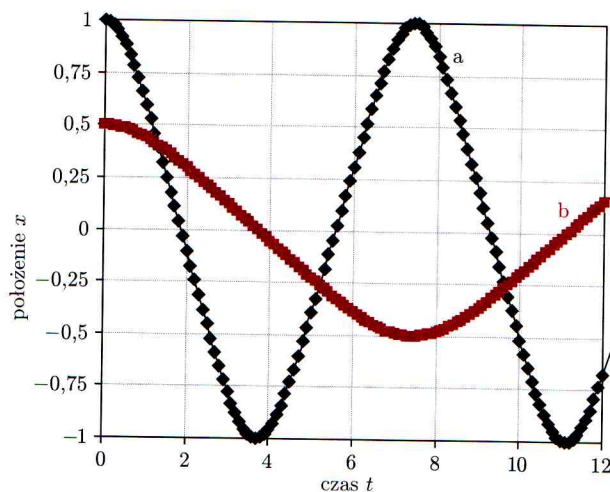
$$(18) \quad F(x) = -Lx^3.$$

Odpowiada to zależności energii potencjalnej od położenia:

$$(19) \quad E_P(x) = \frac{1}{4}Lx^4.$$

Program *Anharmoniczny* działa identycznie jak omówiony powyżej program dla oscylatora harmonicznego. Na rysunku 4 widzimy, że:

1. Funkcja, opisująca zależność $x(t)$ jest funkcją okresową, ale jej kształt wyraźnie odbiega od sinusoidy.
2. Okres – przy ustalonych parametrach L i m – nie jest stały, ale zależy od amplitudy drgań. Zmieniając wartość x_0 można zauważyć, że okres jest odwrotnie proporcjonalny do amplitudy.



Rys. 4. Obliczona numerycznie zależność położenia od czasu dla oscylatora anharmonicznego 1. Dwa zestawy parametrów:
a. $L = 1, m = 1, x_0 = 1$ i $v_0 = 0$,
b. $L = 1, m = 1, x_0 = 2$ i $v_0 = 0$.

Wpływ zmiany innych parametrów na zależność $x(t)$ Czytelnik może prześledzić samodzielnie.

Zadania domowe

Przykłady ruchów można dowolnie mnożyć. Proponuję, aby Czytelnik samodzielnie rozważył dwa przykłady:

1. Drgania cząsteczki dwuatomowej, dla której energię potencjalną oddziaływania między atomami można przybliżyć tak zwanym „potencjałem 6-12”:

$$(20) \quad E_P(x) = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6} \right);$$

z którego wynika wyrażenie na siłę:

$$(21) \quad F(x) = \frac{1}{x^{13}} - \frac{1}{x^7}.$$

Warto rozważyć dwa przypadki warunków początkowych:

$$v_0 = 0 \quad \text{i} \quad 1/\sqrt[6]{2} < x_0 < 1$$

oraz

$$v_0 = 0 \quad \text{i} \quad 0 < x_0 < 1/\sqrt[6]{2} \quad (1/\sqrt[6]{2} \approx 0,891).$$

2. Wahadło matematyczne. W tym przypadku w naszym algorytmie x będzie oznaczać kąt wychylenia, a wielkość F – moment siły. Dla wahadła przyjmujemy

$$(22) \quad F(x) = -\sin(x).$$

Warto rozważyć dwa przypadki warunków początkowych: $x_0 = 0$ i $v_0 < 2$ oraz $x_0 = 0$ i $v_0 > 2$.

Programy

Programy obliczeniowe dla wszystkich omawianych przykładów znajdują się na stronie internetowej *Delty*.



Rozwiązanie zadania F 659.

Składowa pionowa siły Lorentza działającej na elektron w antenie jest stała wzdłuż anteny i wynosi $F = eBv \cos \alpha$, a więc różnica potencjałów między końcami anteny to $U = Bvd \cos \alpha = 2$ mV. Ta różnica potencjałów, przy braku innego połączenia między biegunami anteny, kompensowana jest statycznym rozkładem ładunku wzdłuż anteny. Nie ma więc przepływu prądu elektrycznego w antenie, a zatem brak dodatkowych sił działających na antenę.



Rozwiązanie zadania M 1120.

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną a średnią arytmetyczną, otrzymujemy

$$a \cdot \sqrt[3]{1+b-c} \leq a \cdot \frac{1+1+(1+b-c)}{3} = a + \frac{ab-ac}{3}.$$

Analogicznie mamy

$$b \cdot \sqrt[3]{1+c-a} \leq b + \frac{bc-ba}{3}$$

oraz

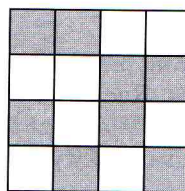
$$c \cdot \sqrt[3]{1+a-b} \leq c + \frac{ca-cb}{3}.$$

Dodając stronami uzyskane nierówności, uzyskujemy tezę.

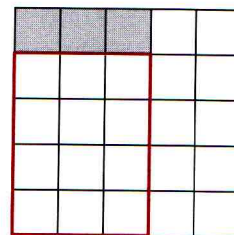


Rozwiązanie zadania M 1122.

Odp.: $n = 4$. Dla $n = 4$ żądane pokolorowanie pokazano na rys. 1. Wykażemy, że takie pokolorowanie nie jest możliwe, jeśli $n = 5$.



Rys. 1



Rys. 2

Przypuścimy, że udało się pokolorować pola szachownicy 5×5 w żądany sposób. Górny wiersz szachownicy 5×5 zawiera co najmniej trzy pola tego samego koloru, powiedzmy czarnego. Przystawiając kolumny możemy doprowadzić do sytuacji, w której pierwsze trzy pola pierwszego rzędu są czarne (rys. 2). Wówczas każdy z pozostałych czterech wierszy zawiera w pierwszych trzech kolumnach co najmniej dwa pola białe. Ponieważ spośród trzech kolumn można wybrać dwie na dokładnie trzy sposoby, więc środki pewnych czterech pól białych (leżących w części z kolorową obwódką, rys. 2) tworzą prostokąt o bokach równoległych do krawędzi szachownicy. Uzyskaliśmy sprzeczność.