Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2006

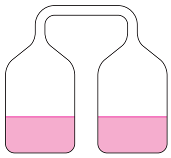
Zadania z fizyki nr 410, 411

Redaguje Jerzy B. BROJAN

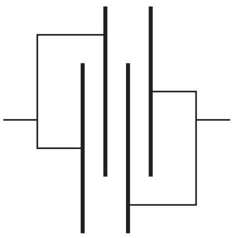
410. Ocenić orientacyjnie stosunek masy niezbędnego paliwa do masy statku kosmicznego wprowadzonego na niską ($h_o = 500$ km) orbitę okołoziemską. Dane: prędkość wylotowa gazów względem rakiety $v_g = 3$ km/s, stosunek siły ciągu silników do ciężaru startowego $n = 1{,}75$. Dla uproszczenia pominąć opór powietrza podczas startu i korzyści wynikające z zastosowania rakiety kilkustopniowej.

Jak dużą oszczędność paliwa daje wystrzelenie statku kosmicznego z kosmodromu na równiku w porównaniu z kosmodromem na biegunie (gdyby istniał tam kosmodrom)?

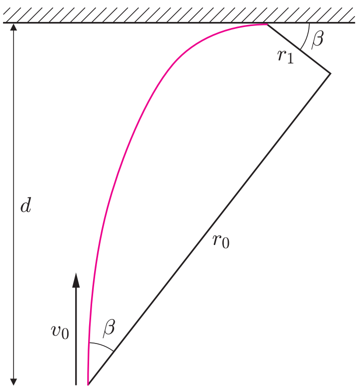
411. W jednym naczyniu znajduje się czysta woda, a w drugim identycznym naczyniu – roztwór soli w wodzie. Naczynia połączono rurką (rys. 1) i pozostawiono na bardzo długi czas. Czy poziom wody w naczyniach pozostanie stały, a jeśli nie, to jak się będzie zmieniał? Jak zależy przebieg zjawiska od tego, czy w naczyniach znajduje się powietrze?



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2005

Przypominamy treść zadań:

402. Samochód wyposażono w opony, których współczynnik tarcia statycznego wzdłuż kierunku jazdy wynosi (na pewnym ustalonym podłożu) $f_1 = 0{,}5$, w kierunku prostopadłym do kierunku jazdy $f_2 = 0{,}8$, a gdy siła tarcia jest skierowana pod kątem α względem kierunku jazdy, współczynnik tarcia statycznego jest dany wzorem $f = f_1 \cos^2\alpha + f_2 \sin^2\alpha$.

a) Jeśli samochód jedzie w stronę długiej prostopadłej ściany, to jak najlepiej uniknąć zderzenia: hamując wzdłuż linii prostej, czy skręcając bez hamowania?

b) Czy skręcając i jednocześnie hamując można uniknąć zderzenia lepiej (tzn. przy większej prędkości początkowej lub przy mniejszej odległości od przeszkody), niż w obu powyższych przypadkach?

c) Czy dobierając nacisk na hamulec i kąt skręcenia kierownicy tak, aby kąt α zmieniał się w czasie jazdy, można lepiej uniknąć zderzenia, niż dla stałej wartości α?

Porównanie dotyczy optymalnego wyboru w zakresie każdej z tych metod, tzn. najlepszego stałego kąta α i najlepszego przebiegu zmian tego kąta. Rozmiary samochodu należy uznać za małe w porównaniu z przebytymi odległościami. W przypadku poślizgu siła tarcia silnie maleje, dlatego zakładamy, że hamowanie poślizgiem kontrolowanym nie będzie skuteczne.

403. Dwa jednakowe kondensatory płaskie o pojemności C połączono równolegle. Obliczyć pojemność tego układu kondensatorów, jeśli jedną z okładek jednego z nich wsunięto między okładki drugiego w połowie odległości między nimi, a powierzchnia części wsuniętej wynosi 2/3 całkowitej powierzchni okładki (rys. 2). Grubość okładek i efekty brzegowe (wynikające z ich skończonych rozmiarów) należy pominąć.

402. a) Droga hamowania wzdłuż prostej jest równa $\frac{v_0^2}{2f_1 g}$, a promień skrętu – $\frac{v_0^2}{f_2 g}$, gdzie v_0 jest prędkością początkową. Ponieważ $2f_1 > f_2$, więc lepiej jest hamować wzdłuż prostej.

b) Przyjmijmy, że kąt α jest stały. Wtedy przyspieszenie styczne jest również stałe i równe $a_{st} = gf\cos\alpha$, a prędkość v po przebyciu drogi s wzdłuż krzywej jest dana wzorem $v^2 = v_0^2 - 2a_{st}s$. Promień krzywizny R wyznaczymy natomiast ze wzoru $R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2 - 2a_{st}s}{a_n}$, gdzie w mianowniku mamy składową normalną przyspieszenia $a_n = gf\sin\alpha$. Widzimy, że promień krzywizny jest liniową funkcją długości łuku. Jak można sprawdzić (lub znaleźć w poradnikach matematycznych), krzywą o tej własności jest spirala logarytmiczna, opisana we współrzędnych biegunowych równaniem $r = a\exp(-k\varphi)$. Spirala ta przecina pod stałym kątem β wszystkie promienie wychodzące z bieguna, a parametr k jest cotangensem tego kąta. Długość łuku spirali jest powiązana z promieniem r wzorem $s\cos\beta = r_0 - r$, a promień krzywizny wynosi $R = r/\sin\beta$.

Porównanie naszego wzoru na R z powyższymi związkami pozwala stwierdzić, że $k = 2a_{st}/a_n = 2\operatorname{ctg}\alpha$, a początkową wartość r można wyznaczyć ze wzoru $v_0^2 = a_n r_0\sqrt{1+k^2}$. Jak widać z rysunku 3, maksymalne przesunięcie wzdłuż kierunku początkowego odpowiada zmianie kąta φ o $\pi/2$, a jego wartość jest dana wzorem $d = r_0\cos\beta + r_1\sin\beta$. Po podstawieniach otrzymujemy

$$d = \frac{v_0^2}{a_n(1+k^2)}(k + \exp(-k\pi/2))$$

Wyrażenie to zależy od kąta α za pośrednictwem parametrów k i a_n, a jego minimalną wartość można znaleźć numerycznie. Przy danych wartościach f_1 i f_2 minimum występuje dla $\alpha = 0{,}88$ rad, wtedy $d = 0{,}885\ v_0^2/g$. Widać, że odpowiedź na pytanie b) jest pozytywna.

c) Sklejając dwie spirale odpowiadające różnym kątom α (zgodnie z intuicją – początkowo mniejszy, potem większy) autorowi udało się otrzymać jeszcze nieco krótszą drogę hamowania. Niemałe umiejętności potrzebne są kierowcy rajdowemu!

403. W obszarze między okładkami o jednakowym potencjale pole elektryczne nie występuje. Przedstawiony układ jest więc równoważny połączeniu równoległemu dwóch kondensatorów o powierzchni okładek $(1/3)S$ i ich odległości d oraz kondensatora o powierzchni okładek $(2/3)S$ i ich odległości $(1/2)d$, gdzie S i d są odpowiednimi parametrami wyjściowych kondensatorów. Pojemność zastępcza wynosi $2C$, przy czym głębokość wsunięcia nie ma znaczenia.