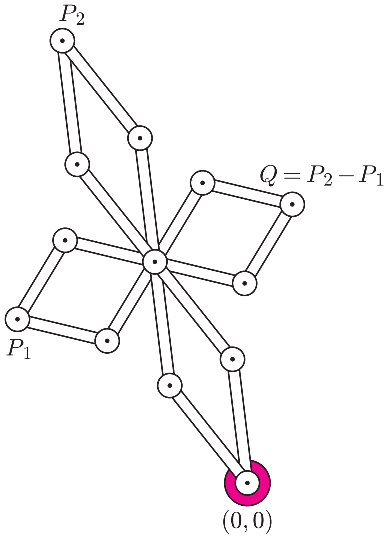


Rys. 10. Dodawacz jako odejmowacz.

Przy konstrukcji przegubu mnożącego kluczowym spostrzeżeniem jest to, że wystarczy, gdy skonstruujemy przegub podnoszący do kwadratu, gdyż $zw = 1/4\left[(z+w)^2 - (z-w)^2\right]$, a więc składając odpowiednio pantograf mnożący przez $1/4$, dwa przeguby podnoszące do kwadratu i trzy dodawacze (w tym dwa pełniące w rzeczywistości funkcję „odejmowaczy"), dostaniemy przegub mnożący. Czy potrafimy więc podnieść przegubem liczbę do kwadratu?

Okazuje się, że wszystkie potrzebne narzędzia już mamy, gdyż

$$z^2 = 2\left[\frac{1}{1/(z-1) - 1/(z+1)} + 1\right],$$

możemy więc podnieść z do kwadratu za pomocą trzech inwersorów, odejmowacza, trzech przesuwaczy (dodających i odejmujących 1) i pantografu mnożącego przez 2.

Strach pomyśleć, jak złożony byłby przegub mnożący, zbudowany wedle powyższego przepisu. A może któryś z Czytelników potrafi podać prostszą konstrukcję?

Wreszcie, co z dzieleniem? Wykręcamy się tu w taki sam sposób, jak to zrobiliśmy z odejmowaniem: wystarczy zamienić „wyjście" przegubu mnożącego z jednym z „wejść". Zauważmy, że mając przeguby realizujące wszystkie cztery działania oraz dodawanie i mnożenie przez ustalone liczby zespolone, możemy zbudować przegub realizujący dowolne przekształcenie postaci

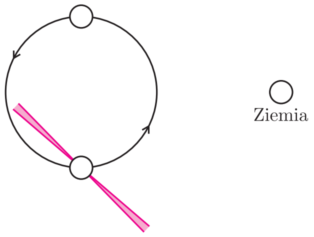
$$z \longmapsto W(z),$$

gdzie $W(z)$ jest wielomianem. Wiedział o tym zapewne już Kempe, pierwsze dowody przedstawili na przełomie XIX i XX wieku G. Koenigs i A. Emch.

Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 657. Układ podwójny składa się z pulsara o masie M i białego karła o takiej samej masie, obiegających środek ciężkości po kołowej orbicie o okresie T, położonej na płaszczyźnie przechodzącej przez Ziemię (rys. 1). Pulsar wykonuje szybkie obroty wokół własnej osi z częstotliwością f tak, że w czasie jednego obrotu stożek emisji pulsara omiata Ziemię raz. Obliczyć, jakie będzie wahanie obserwowanej na Ziemi częstotliwości pulsara na skutek zmiany odległości pulsara i Ziemi (efekt Römera).
Rozwiązanie na str. 2



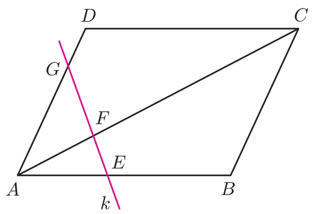
Rys. 1

F 658. Astronomowie obserwują w bardzo dużej odległości D ciało poruszające się ze stałą prędkością v pod kątem β do osi ciało–Ziemia i w kierunku Ziemi (rys. 2). Nie są w stanie mierzyć bezpośrednio składowej radialnej prędkości ruchu, mierzą jednak pozorną prędkość transwersalną obiektu (jako prędkość ruchu ciała po sferze niebieskiej razy odległość D). Jaka musi być relacja między v oraz β, aby ciało wydawało się poruszać z prędkością nadświetlną? Uwzględnić opóźnienie Römera sygnałów świetlnych dolatujących do Ziemi. (W astronomii sytuacje takie zdarzają się dosyć często, np. wyrzut materii ze źródła gamma GRS1915+105, odkryty w 1994 roku, wydawał się poruszać z prędkością 8c.)
Rozwiązanie na str. 11

Rys. 2

Redaguje Waldemar POMPE

M 1117. Wykazać, że liczba postaci $111\ldots1\,222\ldots2$ (w której występuje dokładnie 1000 jedynek i dokładnie 1000 dwójek) jest iloczynem dwóch kolejnych liczb naturalnych.
Rozwiązanie na str. 15

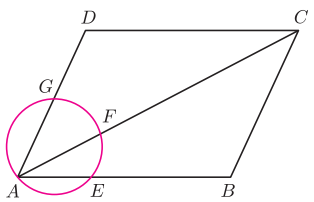


Rys. 3

M 1118. Dany jest równoległobok $ABCD$. Prosta k przecina odcinki AB, AC, AD odpowiednio w punktach E, F, G (rys. 3). Dowieść, że

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AG} = \frac{AC}{AF}.$$

Rozwiązanie na str. 16



Rys. 4

M 1119. Dany jest równoległobok $ABCD$. Pewien okrąg przechodzący przez punkt A przecina odcinki AB, AC, AD odpowiednio w punktach E, F, G (rys. 4). Dowieść, że $AB \cdot AE + AD \cdot AG = AC \cdot AF$.
Rozwiązanie na str. 15