Pole elektryczne jest dużo bardziej tłumione przez małą przewodność czaszki i skóry niż pole magnetyczne. Także nieregularności tych tkanek powodują zniekształcenia w rozkładzie potencjałów na powierzchni głowy w stosunku do ich rozkładu bezpośrednio na korze. Pole magnetyczne pochodzi z kolei głównie od prądów płynących we w miarę jednorodnych obszarach wewnątrzczaszkowych. Ze względu na słabą elektryczną przewodność czaszki nieregularne prądy w czaszce i skórze są słabe i mają bardzo mały wkład do zewnętrznego pola magnetycznego. Dlatego też MEG ma lepszą rozdzielczość przestrzenną niż EEG, dochodzącą nawet do kilku milimetrów. Pomiary MEG mogą być wykonane dużo szybciej, ponieważ nie jest potrzebny kontakt elektrod ze skórą. Z drugiej strony, ze względu na to, że nie ma bezpośredniego kontaktu czujników ze skórą, a także z uwagi na rozmiar aparatury pacjent musi być nieruchomy podczas pomiaru. Natomiast przy pomiarach EEG jest możliwy ruch pacjenta, co przekłada się na większy wachlarz zastosowań eksperymentalnych.

Najciekawsze wydaje się jednoczesne stosowanie pomiarów MEG i EEG. Na przykład w badaniach czynności mózgu podczas snu występują wyraźne różnice pomiędzy obydwoma zapisami. W MEG pojawiają się głównie rytmy teta nieobecne w EEG. Połączenie MEG i EEG umożliwia także lokalizację ognisk padaczki na poziomie zbliżonym do zapisów wykonywanych bezpośrednio z kory mózgowej.

Bibliografia

Hamalainen M., Hari R., Ilmoniemi R., Knuutila J., Lounasmaa O. (1993). *Magnetoencephalography–theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain.* Rev. Mod. Phys, 65: 1-93.

Rozwiązanie zadania F 658.
Zakładamy, że ciało porusza się ruchem jednostajnym i prostoliniowym. Odległość ciała od Ziemi zmienia się zgodnie ze wzorem

$$l = D - vt\cos\beta,$$

a więc światło wysłane w kierunku Ziemi w chwili t dotrze do ziemi w chwili

$$t_1 = t + l/c = t - (vt/c)\cos\beta + D/c.$$

Odległość na sferze niebieskiej z kolei zmienia się według wzoru $s \approx v \sin\beta t$. Łącząc oba wzory, dostajemy zależność

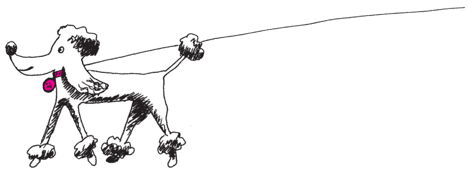
$$s \approx \frac{vt_1 \sin\beta}{1-(cos\beta)v/c} - \frac{vD/c\sin\beta}{1-(\cos\beta)v/c}.$$

Wobec tego pozorna prędkość ruchu ciała po niebie to

$$v_a = v\frac{\sin\beta}{1-(\cos\beta)v/c}.$$

Warunek $v_a > c$ można przekształcić do najprostszej postaci jako

$$v(\sin\beta + \cos\beta) > c.$$



Odpowiedzi i punktacja zadań MiniMaratonu Matematycznego

Runda I

Zad. 1. 222242. [0 lub 1 pkt.]
Dążymy do jak największej liczby początkowych dwójek, np. tak:

$\underline{49}9244 \to 2\underline{49}244 \to 224\underline{24}4 \to 224\underline{92}4 \to 2224\underline{24} \to$
$\to 222\underline{49}2 \to 222242.$

Mniejszych liczb, tzn. 222222, 222224 i 222229 nie da się uzyskać. Pierwszej się nie da, bo każda zmiana wprowadza czwórkę lub dziewiątkę. Ostatniej się nie da, bo dziewiątka nigdy nie powstaje na końcu. Aby uzyskać drugą, trzeba by albo nie zmieniać ostatniej cyfry z układu początkowego, co jest niemożliwe, bo wszystkie pozostałe cyfry musiałyby być dwójkami, co jak już stwierdziliśmy, nie jest możliwe, albo końcowa czwórka musiałaby powstać z układu …49, ale dziewiątki na końcu nie da się uzyskać. Zatem otrzymany wynik jest najmniejszy.

Zad. 2. Piotr 14, Paweł 16. [0 lub 1 pkt.]
Niech x oznacza obecny wiek Piotra, a y – Pawła. Ponieważ za 5 lat suma ich lat zwiększy się o 10, mamy: $x + y + 10 = 40$, czyli $x + y = 30$. Ponieważ $18 = 30 - 12 = x + y - 12$, sześć lat temu bracia mieli w sumie 18 lat. Z zadania mamy więc $x - 6 = y/2$ oraz $x + y = 30$, czyli otrzymujemy układ równań o rozwiązaniu: $x = 14$, $y = 16$.

Zad. 3. 1980. [0 lub 1 pkt.]
Palindromów 3- i 4-cyfrowych jest po 90 ($9 \cdot 10 \cdot 1$ i $9 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1$), 5- i 6-cyfrowych po 900 ($9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1$ i $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$), co daje $90 + 90 + 900 + 900 = 1980$.

Zad. 4. 20. [0 lub 1 pkt.]
Niech x będzie wyjściową ceną, a w ceną obecną (i wskaźnikiem spadku ceny w %). Mamy

$$w = \frac{100-w}{100}x,$$

skąd dochodzimy do równości

$$w = \frac{100x}{100+x} = \frac{100}{\frac{100}{x}+1},$$

z czego wynika, że x dzieli 100. Niech zatem $n \cdot x = 100$. Wtedy podstawiając x do pierwszej równości, otrzymamy $(n+1) \cdot w = 100$, z czego wynika, że zarówno n, jak i $n+1$ dzielą 100. Jedyne kolejne dzielniki 100 to 1 i 2 oraz 4 i 5. Tylko ta druga para pasuje do treści zadania, więc $x = 25$, a $w = 20$.

Zad. 5. 4624, 6084, 8464. [0, 1, 2 lub 3 pkt.]
Czterocyfrowe kwadraty powstają z liczb od 32 do 99. Reszta z dzielenia kwadratu przez 4 daje 0 lub 1, ale w tym drugim przypadku kwadrat byłby nieparzysty i wszystkie jego cyfry musiałyby być nieparzyste. Jedyne możliwe dwucyfrowe końcówki, które spełniałyby te warunki, to: 13, 17, 33, 37, 53, 57, 73, 77, ale kwadraty liczb nieparzystych nie kończą się na 3 ani na 7. Wobec tego szukana liczba i wszystkie jej cyfry są parzyste. Wystarczy więc badać kwadraty liczb parzystych, które wypadają w przedziałach [2000, 3000), [4000, 5000), [6000, 7000) i [8000, 9000). Dla pierwszego przedziału wystarczy sprawdzić 46, 48, 52 i 54. Jednak żaden z ich kwadratów nie spełnia warunków zadania. W pozostałych przedziałach znajdujemy po jednym rozwiązaniu: 68^2, 78^2, 92^2.

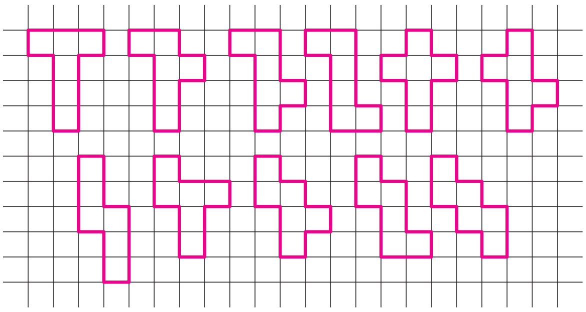
Zad. 6. 17 minut. [0 lub 1 pkt.]
Aby zminimalizować czas, najwolniejsi powinni iść razem i nie mogą iść jako pierwsza para. Niech numerem turysty będzie czas jego przejścia przez most. Kolejne przejścia mogą być np. takie: idą 1 i 2, wraca 1, idą 5 i 10, wraca 2, idą 1 i 2. Czas całkowity to $2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17$.

Runda II

Zad. 1. B, C, D, A, E. [0 lub 1 pkt.]
A musi leżeć pomiędzy D i E. Teraz wystarczy zrobić rysunek.

Zad. 2. 119 zniczy. [za 119 – 2 pkt., za 118 – 1 pkt.]
Z odpadów powstanie 100 zniczy, ale przy ich produkcji nadal powstaną odpadki. $100 : 6 = 16$, reszty 4, a $20 : 6 = 3$, reszty 2, co oznacza, że łącznie nowych zniczy powstało $100 + 16 + 3 = 119$ i zostały jeszcze odpady z 2 zniczy.

Zad. 3. 11. [za 11 – 3 pkt., za 10 lub 12 – 2 pkt., za 9 lub 13 – 1 pkt., za inne 0 pkt.]



Zad. 4. 6 dziewcząt. [0 lub 1 pkt.]
$156 : 8 = 19{,}5$ i $156 : 10 = 15{,}6$, co oznacza, że liczba uczestników konkursu jest większa niż 15 i mniejsza od 20. Musi być też podzielna przez 3, więc może to być tylko 18. Dziewczęta stanowią 1/3 tej liczby.

Zad. 5. 810. [0 lub 1 pkt.]
Iloraz liczby trzycyfrowej przez 45 może być najwyżej dwucyfrowy, więc cyfrą jedności napisanej liczby musi być 0. Mamy więc $\overline{ab0} : 45 = \overline{ba}$, czyli $100a + 10b = 450b + 45a$, co daje $55a = 440b$, czyli $a = 8b$, a ponieważ a i b są cyframi więc $b = 1$ i $a = 8$.

Zad. 6. Alicja-Hubert, Edward-Czesława. [0, 1 lub 2 pkt.]
Dane z zadania wystarczy wpisać do tabeli, w której górna połowa pola koduje małżeństwo, a dolna – taniec. Początkowy stan tabeli jest taki, jak na rysunku. Dalej wypełnia się ją niemal mechanicznie, analizując warunki zadania (i wpisując jak najwięcej minusów).

	A	B	C	D
E	–	+	–	–
F		–		
G		–		
H		–		

Runda III

Zad. 1. Wnuka. [0 lub 1 pkt.]
–

Zad. 2. 17. [0 lub 1 pkt.]
Wprowadzając oczywiste oznaczenia, otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} 3(nd + nc) = gd + gc \\ 2(gc + nd) = gd + nc \end{cases}$$

Ponieważ $gd = gc + nc$, mamy stąd:

$$\begin{cases} 3nd + 2nc = 2gc \\ gc + 2nd = 2nc \end{cases}$$

i

$$\begin{cases} nd/2 = nc/7 \\ nd = gc/5 \end{cases}$$

skąd widać, że nd musi być liczbą parzystą, więc gc dzieli się przez 10. $gc = 0$ dawałoby klasę bez uczniów, $gc = 10$ daje: $nd = 2$, $nc = 7$, $gd = 17$, czyli klasę 36-osobową, a dla większych wartości gc klasa byłaby zbyt liczna. Chłopców jest więc 17.

Zad. 3. 13, 28. [0, 1 lub 2 pkt.]
Najprościej (chyba?) wypisać liczby od 1 do 40 i skreślając „w kółko” co trzecią nieskreśloną, pozostawić dwie.

Zad. 4. (8, 5, 3), (7, 6, 3), (7, 5, 4), (6, 6, 4). [Po 1 pkt. za każdą odpowiedź. Za każdą niepoprawną −1 pkt, do zera.]
Ciąg (P, J, G) jest nierosnący, przy czym $J > G$, P nie przekracza 8, $P + J$ nie przekracza 13, a $P + J + G = 16$. Wystarczy więc wypisać kolejne możliwości, zaczynając od $P = 8$, i zmniejszać liczby.

Zad. 5. 1881. [0 lub 1 pkt.]
Pierwszą (i ostatnią) cyfrą wyniku może być tylko 1 lub 2. Musi być on również podzielny przez 9 (jest sumą iloczynów wszystkich liczb jednocyfrowych przez 1, 10 lub 100).
W grę wchodzą więc liczby 1881 i 2772. Każda z liczb Janka jest na pewno mniejsza od 1000, co najmniej dwie z nich – od 900, a co najmniej jedna od 800 („zużywane” kolejno największe cyfry setek), więc suma nie przekracza $1000 + 900 + 800 = 2700$. Zostaje zatem tylko liczba 1881.

Zad. 6. 39. [0 lub 1 pkt.]
Jeśli x jest początkową liczbą kobiet, to

$$\frac{51{,}25}{100} \leqslant \frac{x+1}{2x+1} < \frac{51{,}35}{100},$$

stąd otrzymujemy

$$18\frac{1}{54} < x \leqslant 19{,}5,$$

ale x jest całkowite, więc wynosi 19.

Runda IV

Zad. 1. Bartek 0,80 zł, Czesław 2,00 zł. [0 lub 1 pkt.]
Wartość całego posiłku to $2{,}80 \cdot 3 = 8{,}40$. Cena 1 cebularza to $8{,}40 : 7 = 1{,}20$. Każdy chłopiec zjadł $7 : 3 = 2\frac{1}{3}$ cebularza. Bartek powinien dostać $(3 - 2\frac{1}{3}) \cdot 1{,}20 = 0{,}80$ zł, a Czesław resztę.

Zad. 2. 11713. [0 lub 1 pkt.]
Dwucyfrową końcówką liczby jest 13, czyli początek powinien mieć sumę cyfr 9. Tworzy on zatem liczbę podzielną przez 9. Musi też dzielić się przez 13. Najmniejsza liczba o tych własnościach to $9 \cdot 13 = 117$.

Zad. 3. 61, 65, 68, 75, 100. [Po 1 pkt. za każdą odpowiedź.]
Mamy:

$$a \cdot b - 60 = \frac{a}{b} + 60, \quad \text{czyli} \quad ab = \frac{a}{b} + 120,$$

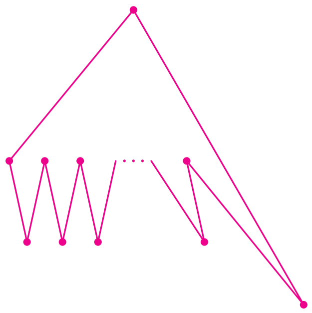
a ponieważ $\frac{a}{b}$ musi być liczbą naturalną, niech więc $a = k \cdot b$. Wobec tego mamy

$$k \cdot b^2 = k + 120, \quad \text{czyli} \quad b^2 = 1 + \frac{120}{k}.$$

Zatem k jest dzielnikiem 120. Dzielniki 120, które powiększone o 1 są kwadratami to 3, 8, 15, 24 i 120, co daje $k \in \{40, 15, 8, 5, 1\}$. Dla każdego z tych przypadków otrzymujemy możliwy wynik Piotrka (równy $k + 60$).

Zad. 4. Zaczyna 40, kończy 13. [0, 1 lub 2 pkt.]
–

Zad. 5. 1002. [0 lub 1 pkt.]
Musi to być wielokąt wklęsły, jak na rysunku.



Zad. 6. 12. [0 lub 1 pkt.]
Ściany ostrosłupów zawierające tę samą krawędź sześcianu leżą w jednej płaszczyźnie. Powstaje dwunastościan rombowy.

Runda V

Zad. 1. Genowefę – Cezary, Barnabę – Eulalia. [0, 1 lub 2 pkt.]
Stany zakochania zakodujmy ciągami: CX_1D, AX_2Y_1H, BX_3Y_2G (każdy kocha osobę występującą w ciągu bezpośrednio po nim, X_i to jakieś dziewczyny (niekoniecznie różne), a Y_i to jacyś chłopcy (niekoniecznie różni).
Stąd i z warunków zadania widać, że X_1 to H albo G.
W pierwszym przypadku dawałoby to zależności AX_2CHD i BX_3Y_2G, więc Y_2 to A, co dawałoby ciąg X_4BX_3AGCHD, gdzie X_3 i X_4 to E i F, co wobec warunków zadania nie jest możliwe. Mamy zatem $X_1 = G$ i zależności: AX_2Y_1H, BX_3CGD, skąd teraz $Y_1 = B$, czyli $AX_2BHCGDX_4$, a dalej z treści zadania X_2 to nie F, więc E.

Zad. 2. 121, 484, 676. [0, 1, 2 lub 3 pkt.]
Kwadraty mogą kończyć się na 1, 4, 5, 6, 9, w grę wchodzą więc liczby postaci $1\square1$, $4\square4$, $5\square5$, $6\square6$, $9\square9$.
Z zakończonych na 5 wystarczy sprawdzić 525 i 575 (muszą dzielić się przez 25). Zakończone na 4 i 6 muszą dzielić się przez 4 (kwadraty parzyste muszą być też podzielne przez 4). Wystarczy więc sprawdzić 404, 424, 444, 464, 484 oraz 616, 636, 656, 686. Podobnie zakończone na 1 i 9 muszą dać resztę 1 z dzielenia przez 4 – czyli sprawdzamy 121, 141, 161, 181 oraz 909, 929, 949, 969, 989. W sprawdzeniach można wykorzystać własność, że kwadraty przy dzieleniu przez 3 dają resztę 0 lub 1.

Zad. 3. BBABAAB. [Bezbłędnie – 2 pkt., jedna pomyłka – 1 pkt, więcej pomyłek – 0 pkt.]
Litera stojąca na miejscu $2k-1$ jest inna od litery następnej, a taka sama jak litera z miejsca k. Zatem litera nr 2001 jest taka jak z miejsca 1001, a ta z kolei taka jak litery z miejsc 501 i 251 oraz 126. Ta jest inna niż litera nr 125, a ta taka sama jak litery 65, 33, 17, 9, 5, 3, 2. Druga litera to B. Zatem B stoi też na miejscach 3, 5, 9, 17, 33, 65, 125, a na miejscach 126, 251, 501, 1001 i 2001 stoi A. Zatem litera nr 2002 to B. Litera nr 2003 jest taka jak litera na pozycji 1002, czyli B. Na miejscu 2004 stoi więc A. Litera nr 2005 jest taka jak litera nr 1003, a ta taka jak litera nr 502, którą jest B. Dalej na miejscu 2006 mamy A i kolejne dwie litery to po analogicznej analizie A i B.

Zad. 4. 799, 800, 801. [0 lub 1 pkt.]
Oznaczmy kolejne cyfry najmniejszej z tych liczb przez a, b, c. Gdyby kolejnymi liczbami były $\overline{ab(c+1)}$ i $\overline{ab(c+2)}$, sumami ich cyfr byłyby trzy kolejne liczby naturalne spomiędzy 1 a 27. Jak łatwo sprawdzić, wśród takich liczb po wielokrotnościach piątki nigdy nie występują kolejno wielokrotność 4 i wielokrotność 3. Druga albo trzecia z szukanych liczb musi się więc kończyć zerem. Mamy więc dla nich następujące możliwości:
$\overline{a(b+1)0}$ i $\overline{a(b+1)1}$ ($c = 9$, $b < 9$);
$\overline{ab9}$ i $\overline{a(b+1)0}$ ($c = 8$, $b < 9$);
$\overline{(a+1)00}$ i $\overline{(a+1)01}$ ($c = 9$, $b = 9$, $a < 9$);
$\overline{a99}$ i $\overline{(a+1)00}$ ($c = 8$, $b = 9$, $a < 9$).
Uwzględniając teraz w każdym z tych przypadków warunki zadania, otrzymujemy rozwiązanie: $c = b = 9$, $a = 7$.

Zad. 5. Nieskończenie wiele. [0 lub 1 pkt.]
Dobre jest każde cięcie wzdłuż prostej przechodzącej przez środek prostokąta. Powstałe figury są wzajemnymi obrazami w symetrii środkowej względem środka prostokąta.

Zad. 6. Zero. [0 lub 1 pkt.]
Koń nie zostawił śladów, bo idzie przed pługiem i ślady zostały zaorane.

Runda VI

Zad. 1. 3323122113. [0 lub 1 pkt.]

Zad. 2. 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55. [0 lub 1 pkt.]
Najmniejsza suma siedmiu liczb nieparzystych to 49, zatem najmniejszy możliwy sześcian to 5^3. Tu jednak szukany rozkład nie istnieje. Ale rozkład 7^3 da się już łatwo znaleźć.

Zad. 3. 45° lub 90°. [0, 1 lub 2 pkt.]
Rozważamy kolejno przypadki, gdy każda z trójsiecznych zawiera wysokość. Wtedy 1/3 lub 2/3 szukanego kąta to 30°.

Zad. 4. 12. [0 lub 1 pkt.]
Wybór 9 wierzchołków wyznacza jednoznacznie 3 odrzucone wierzchołki. Te punkty „rozbijają” dziewięcioelementowy zbiór wybranych wierzchołków na trzy podzbiory (niektóre mogą być puste, gdy niewybrane punkty są sąsiednimi wierzchołkami dwunastokąta). Zatem różnych dziewięciokątów jest tyle, ile różnych rozkładów liczby 9 na sumę trzech liczb naturalnych (nie uwzględniamy rozkładów różniących się kolejnością składników, bo dają wielokąty przystające). Mamy 12 rozkładów: $9 = 9+0+0 = 8+1+0 = 7+2+0 = 7+1+1 = 6+3+0 = 6+2+1 = 5+4+0 = 5+3+1 = 5+2+2 = 4+4+1 = 4+3+2 = 3+3+3$, więc istnieje 12 nieprzystających dziewięciokątów.

Zad. 5. 81. [0 lub 1 pkt.]
Cztery ustalone cyfry możemy wybrać dowolnie, a piąta jest wówczas jednoznacznie wyznaczona (dokładnie jedna z danych do dyspozycji cyfr da sumę cyfr podzielną przez trzy). Szukanych liczb jest więc tyle, ile 4-elementowych ciągów o wyrazach równych 1, 2 lub 3, czyli 3^4.

Zad. 6. 405, 2025, 6075, 10125, 30375, 50625, 70875.
[Po 1 pkt. za każdą odpowiedź. Za każdą niepoprawną -1 pkt, do zera.]
1/81 szukanej liczby to taka liczba naturalna x, że w zapisie liczby $9x$ występują wszystkie cyfry liczby x. Przez skreślenie ostatniej cyfry liczby naturalnej otrzymuje się najwyżej jej 1/10, więc ostatnia cyfra liczby x jest zarazem ostatnią cyfrą $9x$. Ostatnią cyfrą x musi być więc 5. Jeśli $x = 5$, to $9x = 45$ i $81x = 405$, i rzeczywiście 405 jest jednym z rozwiązań. Porównujemy teraz zapisy liczb x i $9x$ oraz w razie potrzeby również $81x$ dla $x = 15, 25, 35, \ldots, 95$ i widać, że rozwiązaniami są również 2025, 6075, oraz że ewentualnych dalszych rozwiązań należy szukać wśród liczb kończących się na 05, 25, 75.