Już po raz drugi gościmy w *Delcie* miesięcznik mmm, czyli Magazyn Miłośników Matematyki. Jedną ze specjalności mmm są Maratony Matematyczne. Taki Maraton to zawody wieloetapowe (i długotrwałe – stąd nazwa) polegające na rozwiązywaniu zadań. *Delta* ma zbyt małą objętość, by przedstawić zadania z pełnego Maratonu. Dlatego *Delta* przedstawia

MiniMaraton Matematyczny

Białystok, wrzesień 2004

Wzięło w nim udział ponad 100 uczniów. Maraton składał się z sześciu 45-minutowych rund (mini w nazwie wzięło się właśnie ze z góry ograniczonego czasu trwania zawodów). Najlepszym do końca wiernie kibicowali pod drzwiami koledzy, nauczyciele i rodzice. Zwycięzcami zostali: Joachim Jelisiejew (I m.), Grzegorz Mironowicz (II m) i Marcin Kamiński (III m.), którym raz jeszcze gratulujemy.

Poniżej przedstawiamy wyciąg z regulaminu konkursu i maratonowe zadania. Dalej zamieszczamy prawidłowe odpowiedzi i sposób oceniania, a także szkice rozwiązań. Jeśli ktoś z Czytelników *Delty* uzna zadania maratonu za interesujące na tyle, by je rozwiązać, lub sam pomysł maratonu ciekawy na tyle, by go wykorzystać, będzie nam bardzo miło. Przy okazji dziękujemy Redakcji *Delty* za gościnne przyjęcie nas na jej stronach.

Redakcja MMM
http://www.mmm.ig.pl

Regulamin Zawodów

1) W konkursie biorą udział uczniowie gimnazjów, bez podziału na kategorie wiekowe.

2) MMM obejmuje 6 rund, które rozpoczynają się o pełnych godzinach. W każdej rundzie zawodnicy otrzymują do rozwiązania 6 łamigłówek w ciągu 45 minut. W ciągu następnych 15 minut następuje sprawdzenie zadań i ogłoszenie wyników.

3) Na karcie odpowiedzi wpisuje się tylko ostateczne wyniki zadań, bez szczegółowych rozwiązań i rachunków. Tylko one podlegają ocenie jury.

4) Po każdej rundzie odpadają zawodnicy z najsłabszymi wynikami. Próg punktów jest każdorazowo ustalany przez jury.

5) Każdy uczestnik MMM może w dowolnym momencie wycofać się z dalszej gry na własne życzenie. Może też zostać zdyskwalifikowany za niesamodzielną pracę.

6) O zwycięstwie w MMM decyduje wynik ostatniej rundy, a jeśli te wyniki będą równe – suma punktów uzyskanych od początku rozgrywki.

7) Uczestnicy przynoszą papier na brudnopis i długopisy. Zabronione jest używanie kalkulatorów, tablic i innych pomocy.

8) Przed wejściem na salę należy wyłączyć telefony komórkowe.

9) Środki dopingujące w postaci czekolady i napojów bezalkoholowych mile widziane.

10) Organizatorzy zastrzegają sobie prawo losowego pobierania próbek moczu, krwi i śliny od uczestników w celu przeprowadzenia laboratoryjnej kontroli antydopingowej.

11) W przypadku pozytywnego wyniku kontroli zawodnik zostaje dożywotnio zdyskwalifikowany.

12) Wszyscy uczestnicy MMM otrzymują dyplomy pamiątkowe, a zdobywcy pierwszych pięciu miejsc – dyplomy honorowe i cenne nagrody-niespodzianki.

Zadania

Runda I

1. Skrzynia jest zamknięta na zamek z 6-cyfrowym kodem. Gdy jest zamknięta, układ cyfr tworzy liczbę 499244. W zamku nie można zmieniać cyfr niezależnie, dopuszczalne są jedynie dwie operacje: jeśli po cyfrze 4 występuje 9, to parę 49 można zastąpić parą 24, jeśli po cyfrze 2 występuje 4, to parę 24 można zastąpić parą 92. Kod otwierający skrzynię to najmniejsza z liczb, jakie można otrzymać z 499244, stosując te operacje. Jaki to kod?

2. Gdy Piotr miał połowę tych lat, ile ma obecnie Paweł, obaj bracia mieli w sumie 18 lat. Za 5 lat będą razem mieli 40 lat. Ile lat mają obecnie?

3. Palindromy czytają się jednakowo od przodu i od tyłu. Ile jest liczb-palindromów pomiędzy sto a milionem?

4. Cheapland jest krajem z galopującą deflacją. Ceny towarów są tu zawsze liczbami naturalnymi i z roku na rok spadają. Zestaw do masażu jest dziś znacznie tańszy niż przed rokiem. Jego obecna cena jest równa wskaźnikowi spadku ceny w ciągu roku wyrażonemu w procentach. Rok temu cena zestawu była niższa niż 100. Ile wynosi dziś?

5. Ze względów bezpieczeństwa hasło do komputera jest codziennie zmieniane. Dzisiejsze jest liczbą czterocyfrową, której zapis nie zaczyna się i nie kończy zerem. Liczba ta jest kwadratem, a jej cyfry mają jednakową parzystość. Jakie może być to hasło?

6. Nad przepaścią przerzucony jest most linowy. Jest uszkodzony, dlatego jednocześnie mogą stać na nim co najwyżej dwie osoby. Jest ciemno, więc trzeba się po nim poruszać z latarką. Na jednym skraju przepaści stanęło czterech towarzyszy. Mają tylko jedną latarkę. Jednemu z nich przeprawa przez most zabiera 10 minut w każdą stronę, drugiemu 5, trzeciemu 2, a czwartemu tylko 1 minutę. Panowie nie są zbyt sprawni fizycznie i każdemu wzięcie któregokolwiek z kolegów „na barana” opóźni czas przejścia dziesięciokrotnie. W jakim najkrótszym czasie wędrowcy mogą przeprawić się przez most?

Runda II

1. Jadąc po prostej drodze, mijamy 5 miejscowości: A, B, C, D i E. Z A do B jest 16 km, z A do D – 6 km, z A do E – 16 km, z C do D – 6 km i z D do E są 22 km. W jakiej kolejności mijamy te miejscowości, jeśli przez D przejeżdżamy wcześniej niż przez A?

2. Z odpadów produkcyjnych powstałych przy produkcji 6 zniczy nagrobkowych można wytworzyć nowy znicz. W magazynie zalega materiał odpadowy z produkcji 600 zniczy. Ile zniczy można wytworzyć z tego materiału?

3. Ile jest różnych (nieprzystających) siatek danego sześcianu?

4. W konkursie matematycznym startowało dwa razy więcej chłopców niż dziewcząt. Każdy z uczestników zdobył 8, 9 albo 10 punktów. Wszyscy razem uzyskali 156 punktów. Ile dziewcząt startowało w konkursie?

5. Jaś zapisał liczbę trzycyfrową, a kiedy przeczytał ją od tyłu, miała 45 razy mniejszą wartość. Jaką liczbę zapisał? Podaj wszystkie możliwości.

6. Na przyjęciu imieninowym byli: Alicja, Barbara, Czesława, Dorota, Edward, Franciszek, Gerwazy i Hubert. Są to 4 małżeństwa. W ostatnim tańcu Basia tańczyła z Edwardem, Alicja z mężem Doroty, Czesława – z mężem Alicji, Franciszek – z żoną Huberta, a Hubert z żoną Edwarda. Kto jest mężem Alicji, a kto żoną Edwarda?

Runda III

1. Spytano mnie pewnego razu, kto jest przedstawiony na portrecie wiszącym na ścianie. Odpowiedziałem: „Ojciec sportretowanej osoby jest jedynym synem tego, który mówi”. Czyj to portret?

2. Klasa Tomka liczy nie więcej niż 40 uczniów. Grzecznych dzieci jest w niej trzykrotnie więcej niż niegrzecznych, natomiast grupa złożona z grzecznych dziewczynek i niegrzecznych chłopców jest dwukrotnie liczniejsza od grupy złożonej z grzecznych chłopców i niegrzecznych dziewczynek. Chłopców w klasie jest tylu, ile grzecznych dziewczynek. To znaczy ilu?

3. Podczas wojny rzymsko-żydowskiej Flawiusz wraz z grupą 40 żydowskich powstańców schronił się w jaskini, którą wkrótce otoczyli Rzymianie. Osaczeni nie mieli żadnych szans i postanowili raczej zginąć niż się poddać. Postanowili utworzyć krąg i pozbawiać życia kolejno co trzecią osobę. Ostatni miał popełnić samobójstwo. Flawiusz z przyjacielem nie chcieli ginąć. Gdzie powinni stanąć, aby ujść z życiem? Podaj ich numery w początkowym kręgu, jeśli osoba, od której rozpoczyna się odliczanie, ma numer 1.

4. W koszu jest 16 owoców. Są tam jabłka, gruszki i pomarańcze. Pomarańczy jest co najmniej tyle, co jabłek, a jabłek jest więcej niż gruszek. Jeśli z koszyka wybierzemy losowo 9 owoców, to będą wśród nich zawsze owoce dwóch rodzajów, a jeśli wybierzemy 14 owoców, to zawsze będą wśród nich wszystkie rodzaje. Ile pomarańczy, jabłek i gruszek jest w koszu? Podaj wszystkie możliwości.

5. Nauczyciel polecił Jankowi, aby z 9 cyfr (bez zera) utworzył trzy liczby trzycyfrowe, wykorzystując każdą z cyfr tylko raz. Janek napisał takie liczby, a potem obliczył ich sumę, która okazała się czterocyfrowym palindromem. Jaka to liczba?

6. Na film „Reksio i tajemnica zielonej budy” przyszło kilkadziesiąt osób, z których dokładnie połowa to panie. W chwilę po rozpoczęciu projekcji weszła jeszcze jedna pani i wtedy stanowiły one po zaokrągleniu do dziesiątych części procenta 51,3% widzów. Ile osób przyszło w sumie do kina?

Runda IV

1. Adam, Bartek i Czesław pojechali na wycieczkę. Okazało się, że roztargniony Adaś zapomniał prowiantu. Koledzy postanowili się z nim podzielić swoimi zapasami. Bartek miał 3 cebularze, a Czesław 4. Chłopcy zebrali je razem i podzielili na trzy równe porcje. Adam, znając cenę cebularza, oszacował swój udział w posiłku na 2,80 zł i wręczył tę kwotę kolegom. Jak powinni oni podzielić te pieniądze między siebie?

2. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną, która dzieli się przez 13, ma sumę cyfr 13 i dwucyfrową końcówkę 13.

3. Piotr jest dyslektykiem i ma poważne problemy z matematyką. Zamiast mnożyć zawsze dzieli, a zamiast odejmować – dodaje. Nauczyciel polecił mu odjąć 60 od iloczynu podanych dwóch liczb naturalnych. Szczęśliwym trafem tym razem Piotr uzyskał poprawny wynik. Jaki wynik mógł uzyskać? Podaj wszystkie możliwości.

4. Jaka liczba zaczyna, a jaka kończy alfabetyczny spis liczebników od 1 do 100 w języku polskim?

5. Na jaką największą liczbę części prosta może rozciąć wielokąt o 2003 bokach?

6. Sześcian dzielimy na 6 przystających ostrosłupów o podstawach będących ścianami tego sześcianu i wspólnym wierzchołku w środku symetrii sześcianu. Następnie ostrosłupy te naklejamy podstawami na ściany sześcianu przystającego do wyjściowego. Ile ścian ma otrzymana bryła?

Runda V

1. Czterech chłopców: Anatol, Barnaba, Cezary i Damian i cztery dziewczyny: Eulalia, Franciszka, Genowefa i Henryka są zakochani w jednej z pozostałych osób, ale (rzecz przykra) uczucia żadnego z nich nie są odwzajemnione. Jeszcze gorzej byłoby, gdyby dwóch chłopców zakochanych było w jednej dziewczynie, a wprost tragicznie, gdyby dwie dziewczyny kochały się w jednym chłopcu. Ale aż tak źle nie jest. Wiadomo, że:

- Barnaba nie jest kochany przez Franciszkę,
- Cezary kocha dziewczynę zakochaną w Damianie,
- ukochany Eulalii nie kocha Franciszki,
- Anatol kocha dziewczynę, która kocha chłopca zakochanego w Henryce,
- w Genowefie kocha się chłopiec, który jest kochany przez ukochaną Barnaby.

Kto kocha Genowefę, a kto Barnabę?

2. Jakie trzycyfrowe palindromy są kwadratami liczb całkowitych?

3. Czarnoksiężnik powierzył swojemu uczniowi magiczny wzór, który zaczynał się od litery A i składał z nieskończonej liczby par liter AB i BA. Uczeń, chcąc zyskać na czasie, zapisał ten wzór, zastępując każdą parę AB przez A, a parę BA przez B. O dziwo, magiczny wzór nie zmienił się. Jakie litery stały na miejscach o numerach od 2002 do 2008?

4. Znaleźć najmniejsze trzy kolejne liczby naturalne trzycyfrowe, z których pierwsza ma sumę cyfr podzielną przez 5, środkowa przez 4, a ostatnia przez 3.

5. Na ile sposobów można za pomocą jednego cięcia wzdłuż prostej podzielić prostokąt na dwie identyczne części?

6. Koń orał pole przez cały dzień. Od miedzy do miedzy pole rozciągało się na 95 m. Koń wystawiał nogę zawsze na 0,5 m naprzód. Ile śladów kopyt zostało w ostatniej bruździe?

Runda VI

1. Znaleźć największą liczbę zapisaną cyframi 1, 2 i 3 o tej własności, że wybrane z jej zapisu liczby dwucyfrowe są wszystkie różne.

2. Podaj siedem kolejnych liczb naturalnych nieparzystych, których suma jest sześcianem liczby pierwszej.

3. W trójkącie ABC, w którym $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, kąt BAC podzielono na 3 równe części. Jedna z dzielących go półprostych zawiera wysokość trójkąta. Jaka jest miara $\sphericalangle BAC$?

4. Na okręgu zaznaczono wierzchołki dwunastokąta foremnego, a następnie wybrano 9 spośród nich i łącząc kolejno, wyznaczono pewien wielokąt. Ile nieprzystających wielokątów można w ten sposób uzyskać?

5. Ile jest pięciocyfrowych liczb podzielnych przez 3, które nie mają cyfr innych niż 1, 2 i 3?

6. Dyrektor szkoły zamknął pytania egzaminacyjne w kasie pancernej, której drzwi otwiera specjalny kod. Jest on liczbą naturalną, co najwyżej pięciocyfrową, nie zaczyna się i nie kończy się zerem i ma następującą własność: jeżeli wykreślimy w nim pewną cyfrę, to otrzymana nowa liczba jest równa 1/9 liczby początkowej, a jeśli ponownie wykreślimy jedną cyfrę tej drugiej liczby, to otrzymamy dokładnie 1/81 kodu początkowego. Jaki jest kod kasy pancernej w szkole? Podaj wszystkie możliwości.