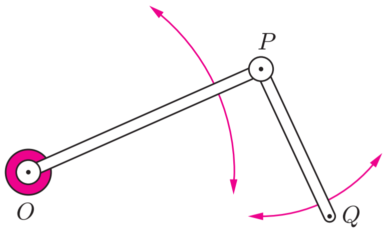
Jak mnożyć przeguby?

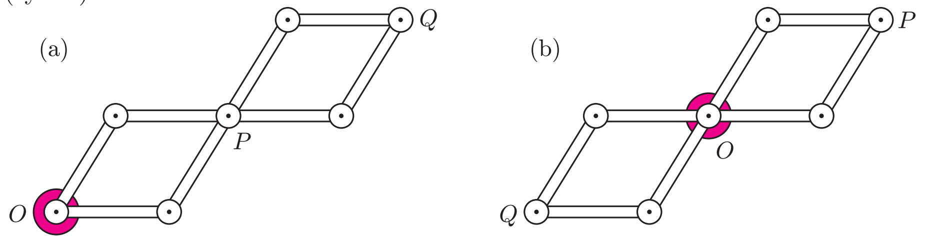
Paweł GOLDSTEIN[*]



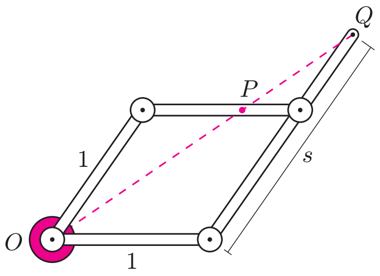
Rys. 1. Przegub jest w punkcie O zamocowany na stałe do podłoża.

Przegubem (lub – precyzyjniej – płaskim mechanizmem przegubowym) nazywamy mechanizm złożony z pewnej liczby sztywnych prętów, połączonych w taki sposób, by mogły się obracać wokół punktu połączenia. Przegub jest w pewnych punktach na stałe zamocowany do podłoża; również wokół tych punktów przegub może się obracać (rys. 1).

Jednym z najstarszych i najpowszechniej znanych przegubów jest *pantograf* (rys. 2).

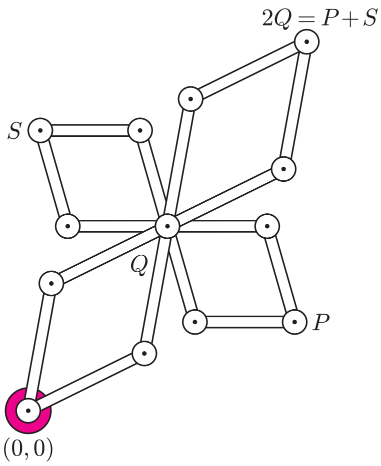


Rys. 2. (a) Pantograf o skali $s = 2$; (b) pantograf o skali $s = -1$.



Rys. 3. Uproszczony pantograf.

Zauważmy, że gdy punktem P wodzimy po pewnej krzywej, punkt Q zakreśla obraz tej krzywej względem jednokładności o środku w O i skali s. Rysunek (b) ukazuje pantograf realizujący jednokładność o ujemnej skali. Możemy też skonstruować pantograf złożony tylko z 4 prętów (rys. 3).

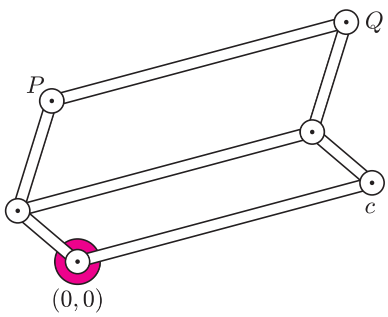


Rys. 4. Dodawacz (dwa skrzyżowane pantografy ze stałą 2).

Nazwa *pantograf* po grecku oznacza „rysujący wszystko". I rzeczywiście – pantograf jest „pra–kserografem". W renesansie, a zapewne i wcześniej, używano go do kopiowania dokumentów, a także obrazów. Wiadomo, że korzystał z niego Leonardo da Vinci.

Nieco później, w XVIII wieku, zaczęto stosować go do odwzorowywania obiektów przestrzennych; używano go, między innymi, do kopiowania rzeźb, a także czcionek drukarskich. Gdy byłem dzieckiem, plastikowe pantografy były popularną zabawką – w punkcie P umieszczony był rysik, w punkcie Q można było zamocować kredkę. Niestety, robiono je z mało sztywnego, wyginającego się plastiku i do rysowania niezbyt się nadawały.

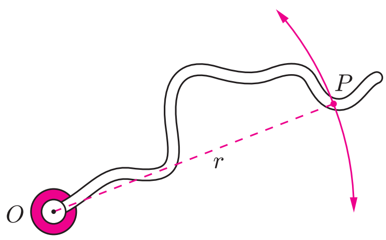
Zauważmy, że jeżeli utożsamimy płaszczyznę ze zbiorem liczb zespolonych, przypisując punktom S, P i Q odpowiednio liczby z_S, z_P i z_Q, otrzymamy zależność: $z_Q = z_S + s(z_P - z_S)$. W szczególności mając do dyspozycji dwa pantografy: do rysowania w skali 2 i w skali 1/2, możemy skonstruować przyrząd do dodawania liczb zespolonych (a więc i wektorów). W rzeczywistości możemy użyć dwóch przegubów o skali 2, zamieniając w jednym z nich role punktów P i Q (rys. 4).



Rys. 5. Przesuwacz.

Oczywiście, $z_Q = z_S + \frac{1}{2}(z_P - z_S) = \frac{1}{2}(z_S + z_P)$. Możemy teraz „pomnożyć" punkt Q przez 2 – przekształcić go przez jednokładność o skali 2 za pomocą drugiego pantografu, zamocowanego w punkcie $(0, 0)$.

Trochę łatwiej dodaje się do liczby zespolonej z liczbę c o znanym, ustalonym module. Odpowiada to przesunięciu punktu P o wektor o danej długości. Można to zrobić za pomocą „przesuwacza" z rysunku 5.
Oczywiście, $z_Q = z_P + c$.

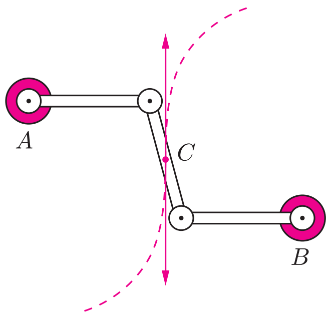


Rys. 6. Bardzo krzywy „cyrkiel".

Inną, bardzo ważną grupą przegubów są tzw. inwersory. Służą one bądź do zamiany ruchu po okręgu na ruch po prostej, bądź odwrotnie – z ruchu po prostej na ruch po okręgu. Aby zrozumieć wagę pierwszego zastosowania, zastanówmy się, jak zazwyczaj rysujemy linie proste. Podstawowym, szkolnym narzędziem jest tu linijka; milcząco zakładamy, że jej brzeg jest dostatecznie prosty. Zauważmy, że kreślenie okręgu nie jest obarczone tego typu niedokładnością: gdy zamocujemy koniec nawet bardzo krzywego pręta w pewnym punkcie, jego drugi koniec (i każdy inny punkt pręta) będzie zataczał okrąg. Gdybyśmy mieli więc przegub zamieniający ten ruch po okręgu na ruch po prostej, zyskalibyśmy precyzyjniejsze narzędzie do kreślenia prostych niż linijka.

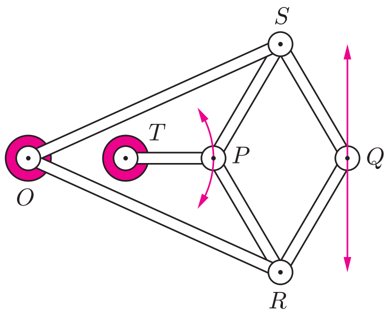
[*]Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

Historia drugiego zastosowania inwersorów – zamiany ruchu posuwistego (ruchu po odcinku) na ruch kołowy – związana jest nierozerwalnie z silnikiem parowym. Nie będziemy wchodzić w szczegóły techniczne, ważne jest, że ruch tłoka (w przód i w tył) należy w nim zamienić na ruch obrotowy koła zamachowego. James Watt, twórca ulepszonego silnika parowego, skonstruował w 1784 roku prosty przegub (rys. 7) rozwiązujący to zagadnienie w sposób przybliżony (uważał go za jedno ze swoich największych odkryć). Konstrukcja ta, zwana prostowodem Watta, stosowana jest dziś powszechnie w bardzo różnych mechanizmach.



Rys. 7. Prostowód Watta. Punkty A i B są zamocowane na stałe, punkt C porusza się w przybliżeniu po prostej (kreskami zaznaczono krzywą, po której w rzeczywistości porusza się C).

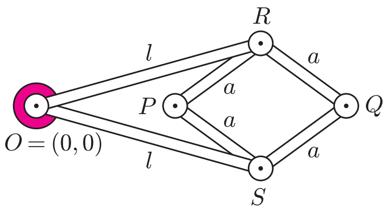
Przez następne 100 lat konstruowano inne przybliżone inwersory – zajmowali się tym m.in. Evans i Czebyszew. Powszechnie wierzono, że dokładne (nie przybliżone) rozwiązanie zagadnienia nie istnieje. Poprawne rozwiązanie, przedstawione w 1864 roku przez C.N. Peaucelliera, oficera armii francuskiej, przeszło niezauważone; dopiero gdy 9 lat później L.I. Lipkin, który niezależnie skonstruował ten sam przegub, przedstawił go na Wystawie Światowej w Wiedniu, wynalazek ów został powszechnie doceniony (rys. 8).



Rys. 8. Inwersor Peaucelliera–Lipkina. $|OS| = |OR|$, $|PS| = |PR| = |SQ| = |QR|$, $|OT| = |PT|$. Gdy punkt P porusza się po okręgu o środku w T, punkt Q porusza się po prostej prostopadłej do odcinka OT (dlaczego?).

Wiele różnych modeli inwersorów przedstawił w *Delcie* 1/2004 Marek Kordos w artykule *Jak narysować linię prostą?* Wykład pod tym tytułem Alfred Bray Kempe wygłosił w 1876 roku w South Kensington Museum w Londynie. Kempe (1849–1922) był bardzo szanowanym prawnikiem londyńskim, specjalizującym się w prawie kanonicznym. Matematykę traktował jako hobby, był jednak do jej uprawiania dokonale przygotowany – ukończył studia matematyczne, był uczniem wybitnego angielskiego algebraika Artura Cayleya. Artykuł, w którym zawarł tekst wspomnianego, bardzo interesującego wykładu, można znaleźć na stronach Uniwersytetu Cornell (`http://historical.library.cornell.edu/cgi-bin/cul.math/docviewer?did=Kemp009&seq=5`).

Przyjrzyjmy się staranniej (nieznacznie zmodyfikowanemu) inwersorowi Peaucelliera (rys. 9).



Rys. 9. Uproszczony inwersor Peaucelliera. Jak poprzednio, $|OS| = |OR|$, czworokąt $PSQR$ jest rombem. Jeśli X jest środkiem PQ, to

$$\begin{aligned}&|OP|\cdot|OQ| =\\ &= (|OX| - |PX|)(|OX| + |PX|) =\\ &= |OX|^2 - |PX|^2 =\\ &= (|OR|^2 - |RX|^2) - |PX|^2 =\\ &= |OR|^2 - (|RX|^2 + |PX|^2) = l^2 - a^2,\end{aligned}$$

a więc iloczyn ten nie zależy od położenia ruchomych punktów przegubu, lecz jedynie od długości jego prętów.

Jeżeli w tym inwersorze dobierzemy l i a tak, by $l^2 - a^2 = 1$, zauważymy, że $|z_P||z_Q| = 1$, a że z_P i z_Q leżą na tej samej prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych, mamy $z_Q = \lambda z_P$ dla pewnej (dodatniej) liczby rzeczywistej λ. Z tych dwóch równości dostajemy natychmiast, że $\lambda = 1/|z_P|^2$, a więc $z_Q = \lambda z_P = z_P/(|z_P|^2) = z_P/(z_P\overline{z_P}) = 1/\overline{z_P}$ (przez $\overline{z_P}$ oznaczyłem sprzężenie zespolone liczby z_P: $\overline{x + \mathrm{i}y} = x - \mathrm{i}y$).

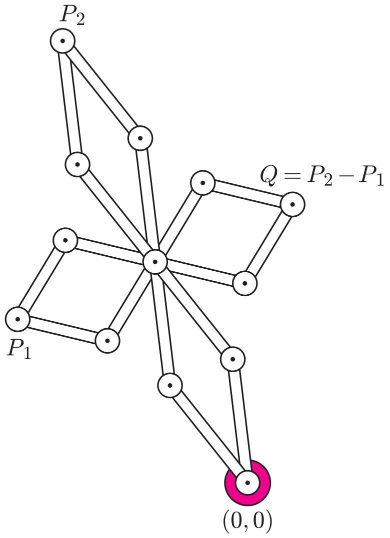
Takie przekształcenie płaszczyzny zespolonej nazywamy inwersją (ściślej – inwersją względem okręgu jednostkowego), stąd też pochodzi nazwa naszych przegubów.

Zauważmy, że wszystkie przedstawione w artykule przeguby miały jedno lub dwa („dodawacz") „wejścia" (najczęściej oznaczane przez P, ew. liczbę zespoloną z_P) oraz „wyjście" (Q lub z_Q), przy czym przegub dokonywał pewnych przekształceń na „danych wejściowych", wynik podając na „wyjściu". Przy takim podejściu łatwo zrozumieć, że przeguby można ze sobą „składać" – wystarczy połączyć „wyjście" jednego z nich z „wejściem" drugiego. Odpowiada to złożeniu przekształceń, jakie realizują te dwa przeguby.

Na razie potrafimy skonstruować przeguby realizujące przekształcenia:

$z \mapsto z + c$ (przesuwacz),		$z \mapsto az$ (pantograf),
$(z, w) \mapsto z + w$ (dodawacz)	oraz	$z \mapsto 1/\overline{z}$ (inwersor).

Składając na przykład dodawacz z inwersorem, możemy teraz zbudować przegub realizujący przekształcenie $(z, w) \mapsto w + 1/\overline{z}$, a składając je w przeciwnej kolejności $(z, w) \mapsto 1/(\overline{z + w}) = 1/(\overline{z} + \overline{w})$. Oczywiście, w dodawaczu możemy zamienić „wyjście" z jednym z „wejść" – dostaniemy w ten sposób „odejmowacz", czyli przegub realizujący przekształcenie $(z, w) \mapsto z - w$. Do kompletu działań za pomocą przegubów brak nam mnożenia i dzielenia dwóch liczb zespolonych.



Rys. 10. Dodawacz jako odejmowacz.

Przy konstrukcji przegubu mnożącego kluczowym spostrzeżeniem jest to, że wystarczy, gdy skonstruujemy przegub podnoszący do kwadratu, gdyż $zw = 1/4\left[(z+w)^2 - (z-w)^2\right]$, a więc składając odpowiednio pantograf mnożący przez $1/4$, dwa przeguby podnoszące do kwadratu i trzy dodawacze (w tym dwa pełniące w rzeczywistości funkcję „odejmowaczy”), dostaniemy przegub mnożący. Czy potrafimy więc podnieść przegubem liczbę do kwadratu?

Okazuje się, że wszystkie potrzebne narzędzia już mamy, gdyż

$$z^2 = 2\left[\frac{1}{1/(z-1) - 1/(z+1)} + 1\right],$$

możemy więc podnieść z do kwadratu za pomocą trzech inwersorów, odejmowacza, trzech przesuwaczy (dodających i odejmujących 1) i pantografu mnożącego przez 2.

Strach pomyśleć, jak złożony byłby przegub mnożący, zbudowany wedle powyższego przepisu. A może któryś z Czytelników potrafi podać prostszą konstrukcję?

Wreszcie, co z dzieleniem? Wykręcamy się tu w taki sam sposób, jak to zrobiliśmy z odejmowaniem: wystarczy zamienić „wyjście” przegubu mnożącego z jednym z „wejść”. Zauważmy, że mając przeguby realizujące wszystkie cztery działania oraz dodawanie i mnożenie przez ustalone liczby zespolone, możemy zbudować przegub realizujący dowolne przekształcenie postaci

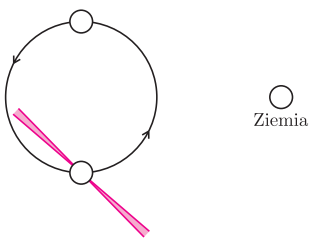
$$z \longmapsto W(z),$$

gdzie $W(z)$ jest wielomianem. Wiedział o tym zapewne już Kempe, pierwsze dowody przedstawili na przełomie XIX i XX wieku G. Koenigs i A. Emch.

Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 657. Układ podwójny składa się z pulsara o masie M i białego karła o takiej samej masie, obiegających środek ciężkości po kołowej orbicie o okresie T, położonej na płaszczyźnie przechodzącej przez Ziemię (rys. 1). Pulsar wykonuje szybkie obroty wokół własnej osi z częstotliwością f tak, że w czasie jednego obrotu stożek emisji pulsara omiata Ziemię raz. Obliczyć, jakie będzie wahanie obserwowanej na Ziemi częstotliwości pulsara na skutek zmiany odległości pulsara i Ziemi (efekt Römera).
Rozwiązanie na str. 2



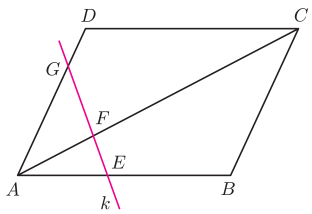
Rys. 1

F 658. Astronomowie obserwują w bardzo dużej odległości D ciało poruszające się ze stałą prędkością v pod kątem β do osi ciało–Ziemia i w kierunku Ziemi (rys. 2). Nie są w stanie mierzyć bezpośrednio składowej radialnej prędkości ruchu, mierzą jednak pozorną prędkość transwersalną obiektu (jako prędkość ruchu ciała po sferze niebieskiej razy odległość D). Jaka musi być relacja między v oraz β, aby ciało wydawało się poruszać z prędkością nadświetlną? Uwzględnić opóźnienie Römera sygnałów świetlnych dolatujących do Ziemi. (W astronomii sytuacje takie zdarzają się dosyć często, np. wyrzut materii ze źródła gamma GRS1915+105, odkryty w 1994 roku, wydawał się poruszać z prędkością 8c.)
Rozwiązanie na str. 11

Rys. 2

Redaguje Waldemar POMPE

M 1117. Wykazać, że liczba postaci $111\ldots1\,222\ldots2$ (w której występuje dokładnie 1000 jedynek i dokładnie 1000 dwójek) jest iloczynem dwóch kolejnych liczb naturalnych.
Rozwiązanie na str. 15

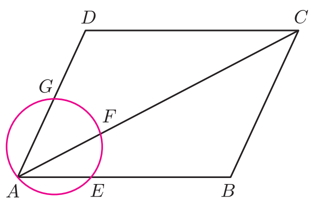


Rys. 3

M 1118. Dany jest równoległobok $ABCD$. Prosta k przecina odcinki AB, AC, AD odpowiednio w punktach E, F, G (rys. 3). Dowieść, że

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AG} = \frac{AC}{AF}.$$

Rozwiązanie na str. 16



Rys. 4

M 1119. Dany jest równoległobok $ABCD$. Pewien okrąg przechodzący przez punkt A przecina odcinki AB, AC, AD odpowiednio w punktach E, F, G (rys. 4). Dowieść, że $AB \cdot AE + AD \cdot AG = AC \cdot AF$.
Rozwiązanie na str. 15