O metodach fizycznych w geometrii

Piotr ACHINGER[*]

Poniżej postaram się pokazać, jak szerokie zastosowania w geometrii mogą mieć pojęcia znane zapewne większości Czytelników z lekcji dynamiki. Są to *środek masy* oraz *moment bezwładności*. Ograniczę się jednak do geometrii płaskiej, i to głównie geometrii trójkąta.

Środek masy. Dla uściślenia, *układem* będziemy nazywali zbiór par (m_i, P_i) („mas punktowych”), gdzie P_i jest punktem płaszczyzny, m_i zaś jego „masą” (dla $i = 1, 2, \ldots, n$). Aby nie wzbudzić kontrowersji, początkowo przyjmijmy, że „masy” takie są liczbami rzeczywistymi dodatnimi (potem jednak pozbędziemy się tego zbędnego ograniczenia). Jak wiadomo, środkiem masy danego układu nazywamy taki punkt G, że

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \cdot \overrightarrow{OP_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OP_2} + \ldots + m_n \cdot \overrightarrow{OP_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

gdzie O jest początkiem układu współrzędnych. Warto przytoczyć (bez dowodów, choć wszystkie są jednolinijkowe) kilka ogólnie znanych faktów dotyczących środka masy:

1. Nie zależy on od wyboru układu współrzędnych.

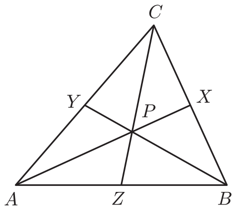
2. Jeżeli A, B, C są masami punktowymi, a masa punktowa Z leży w środku masy układu $\{A, B\}$ i ma wartość równą sumie mas A i B, to środek masy układu $\{A, B, C\}$ jest środkiem masy układu $\{Z, C\}$, leży więc na odcinku ZC.

3. Stosunek, w jakim środek masy S układu dwóch dodatnich mas punktowych m_A i m_B, umieszczonych w punktach A i B, dzieli odcinek AB, jest równy $\frac{BS}{AS}$.

Jak wiadomo, jeżeli w wierzchołkach trójkąta ABC umieścimy równe masy, to środek masy takiego układu będzie środkiem ciężkości tego trójkąta. Możemy zastanowić się, jakie masy m_A, m_B, m_C umieścić w wierzchołkach, aby środek masy otrzymanego układu był innym punktem szczególnym trójkąta, np. środkiem okręgu wpisanego (rysunek). Skoro środek okręgu wpisanego P leży na odcinku CZ, to (korzystamy z faktu 2.) punkt Z musi być środkiem ciężkości dla mas w A i B, zatem (fakt 3.) $\frac{BZ}{AZ} = \frac{m_A}{m_B}$, lecz (z twierdzenia o dwusiecznej) $\frac{BZ}{AZ} = \frac{BC}{AC}$, wystarczy zatem wziąć

$$m_A = BC, \quad m_B = AC, \quad m_C = AB.$$

Chcąc otrzymać np. ortocentrum lub środek okręgu opisanego, musimy zastanowić się nad przypadkiem, gdy któryś z nich leży poza trójkątem – manipulując nieujemnymi masami, możemy otrzymać tylko punkty trójkąta ABC. Przyjmijmy zatem, że masy są dowolnymi liczbami rzeczywistymi (właściwszą analogią wydaje się teraz pojęcie ładunku elektrycznego). Powyższe stwierdzenia pozostają w mocy, jeśli zaznaczymy, że środek masy nie istnieje, gdy masa układu jest równa 0. Ortocentrum trójkąta możemy otrzymać, umieszczając w A, B, C masy $\operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma$, $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\gamma$, $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$, dla środka okręgu opisanego zaś masy będą równe $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\sin 2\gamma$ (sprawdzenie tych prawidłowości nie powinno nastręczyć Czytelnikowi zbyt wiele kłopotu).



Przejdźmy zatem do zadań.

Zadanie 1 (twierdzenie Cevy). Punkty X, Y, Z leżą na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Wykazać, że proste AX, BY, CZ mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1.$$

Rozwiązanie.
1° Załóżmy, że proste te przecinają się w punkcie P. Umieśćmy w punktach A, B, C masy odpowiednio $m_A = BZ \cdot CX$, $m_B = AZ \cdot CX$, $m_C = BX \cdot AZ$, wówczas (korzystając z faktu 3.) punkty Z i X będą środkami mas dla par A, B i B, C, zatem środek masy całego układu będzie leżał zarówno na prostej CZ, jak i AX, będzie to zatem punkt P. Z faktu 3. wiemy także, że

$$\frac{CY}{AY} = \frac{m_A}{m_C} = \frac{BZ}{BX} \cdot \frac{CX}{AZ},$$

skąd wynika teza.

2° Załóżmy, że

$$\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1.$$

Określmy masy w wierzchołkach jak poprzednio. Wówczas punkt X będzie środkiem masy dla B i C, zatem środek masy całego układu będzie leżał na odcinku AX, analogicznie na BY i CZ, więc odcinki te mają punkt wspólny.

Zadanie 2 (twierdzenie Van Aubela). Przy założeniach z poprzedniego zadania wykazać, że jeśli proste AX, BY, CZ przecinają się w punkcie P, to

$$\frac{AP}{PX} = \frac{AY}{YC} + \frac{AZ}{ZB}.$$

Rozwiązanie. Niech masy m_A, m_B, m_C będą określone tak, aby punkt P był środkiem masy. Wówczas

$$\frac{AY}{YC} = \frac{m_C}{m_A}, \qquad \frac{AZ}{ZB} = \frac{m_B}{m_A},$$

punkt X zaś jest środkiem mas w B i C, możemy zatem (fakt 2.) umieścić w nim masę $m_X = m_B + m_C$ i uznać punkt P za środek mas w A i X, zatem (fakt 3.) $\frac{AP}{PX} = \frac{m_X}{m_A} = \frac{m_B + m_C}{m_A}$, skąd wynika teza.

Zadanie 3. Niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC wpisanego w okrąg o środku w O. Wykazać, że pola pewnych dwóch z trzech trójkątów OHA, OHB, OHC sumują się do pola trzeciego.

[*] uczeń XIV LO w Warszawie

Rozwiązanie. Wielu Czytelników zna zapewne fakt następujący: punkty O, H oraz środek ciężkości M trójkąta leżą na jednej prostej (tzw. *prostej Eulera*). Obierzmy układ współrzędnych, w którym oś OX jest prostą Eulera, niech punkty A, B, C mają w nim współrzędne (x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_B, y_B). Trójkąty OHA, OHB, OHC mają wspólną podstawę OH, należy więc wykazać, że wysokości opuszczone na OH dwóch z nich sumują się do wysokości trzeciego. Wysokości te zaś są równe y_A, y_B, y_C. Oczywiście

$$0 = y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

(z definicji środka masy dla mas równych 1, czyli środka ciężkości), skąd wynika teza.

Moment bezwładności. *Momentem bezwładności* danego układu względem punktu X nazywamy liczbę

$$I_X = \sum m_i r_i^2,$$

gdzie $r_i = XP_i$. Fizycy używają tej wielkości do charakteryzacji ruchu obrotowego brył sztywnych (wówczas punkt X uważamy za punkt przebicia płaszczyzny prostopadłą do niej osią obrotu), ma on jednak także zastosowanie w geometrii, głównie dzięki bardzo mocnemu twierdzeniu, znanemu jako

Twierdzenie Steinera. Jeżeli dany układ ma niezerową masę (czyli ma środek masy), to dla dowolnego punktu X zachodzi równość $I_X = I_G + Md^2$, gdzie G – środek masy, M – masa układu, $d = GX$.

Dowód. Weźmy układ współrzędnych, w którym $G = (0, 0)$ oraz $X = (d, 0)$. Wówczas

$$I_X = \sum m_i \left((x_i - d)^2 + y_i^2\right) = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) -$$

$$-2d \sum m_i x_i + d^2 \sum m_i = I_G + 0 + Md^2.$$

gdyż $0 = x_G = \dfrac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$ implikuje $\sum m_i x_i = 0$.

Wniosek. Jeśli masa układu jest dodatnia, moment bezwładności jest najmniejszy względem środka masy tego układu.

Cóż, zobaczmy, jak się ma to do rozwiązywania zadań.

Zadanie 4. W trójkącie ABC znaleźć taki punkt X, aby suma $AX^2 + BX^2 + CX^2$ była najmniejsza.

Rozwiązanie. Umieśćmy masy 1 w wierzchołkach trójkąta. Wówczas rozpatrywana suma jest momentem bezwładności układu względem X, zatem jest najmniejsza, gdy X jest środkiem masy, czyli środkiem ciężkości trójkąta ABC.

Zadanie 5. Punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym ABC. Wykazać, że suma $AP^2 + BP^2 + CP^2$ nie zależy od wyboru punktu P.

Rozwiązanie. Umieśćmy ponownie masy 1 w wierzchołkach oraz oznaczmy środek okręgu przez O, jego promień zaś przez R. Rozpatrywana suma jest momentem bezwładności układu względem P, zatem (z tw. Steinera) jest równa

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + 3PO^2 = 6R^2.$$

Zadanie 6. Punkt P leży na okręgu wpisanym w trójkąt ABC. Wykazać, że suma

$$AP^2 \cdot BC + BP^2 \cdot AC + CP^2 \cdot AB$$

nie zależy od wyboru punktu P.

Rozwiązanie. Umieśćmy masy równe BC, CA, AB w wierzchołkach A, B, C oraz oznaczmy środek okręgu wpisanego przez I. Suma

$$AP^2 \cdot BC + BP^2 \cdot AC + CP^2 \cdot AB$$

jest momentem bezwładności układu względem P, środek masy natomiast leży (co już udało nam się udowodnić) w punkcie I, którego odległość od P jest stała.

Metody te stosują się nie tylko do geometrii, co ilustruje poniższy przykład:

Zadanie 7. Na każdym polu szachownicy 2000×2000 leży kamyk. Ruch polega na przesunięciu dwóch kamyków leżących na polach oddalonych o 2 (w jednej kolumnie lub rzędzie) na pole pomiędzy nimi (na jednym polu może leżeć dowolna liczba kamieni).

1° Czy można tak wybrać kolejność ruchów, aby wszystkie kamyki znalazły się na jednym polu?

2° Czy w tę grę można grać w nieskończoność?

Rozwiązanie.

1° Nie, gdyż ruch zachowuje środek masy wszystkich kamieni (zakładamy, że są one jednakowo ciężkie), który leży w środku szachownicy, zatem ostatecznie wszystkie kamienie musiałyby znaleźć się pośrodku, pomiędzy kratkami, gdyż bok szachownicy ma parzystą długość!

2° Nie, gdyż (co łatwo pokazać) każdy ruch zmniejsza moment bezwładności wszystkich kamieni względem środka szachownicy o liczbę całkowitą dodatnią (przyjmujemy, że bok pola szachownicy ma długość 1, masy kamieni zaś są równe 1), nie może on jednak spaść poniżej 0.

Oczywiście, wszystkie te zadania można zrobić dość łatwo innymi metodami, które w zasadzie sprowadzałyby się do tego, o czym piszę powyżej, tylko w innym ujęciu. Operowanie pojęciami tutaj opisanymi pozwala jednak swobodniej posługiwać się intuicją, skracając czasami wielokrotnie czas myślenia nad zadaniem.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Założenia jak w zadaniu 2., wykazać, że

$$\frac{AP}{PX} \cdot \frac{BP}{PY} \cdot \frac{CP}{PZ} \geqslant 8.$$

2. Znaleźć środek masy *obwodu* trójkąta.

3. M jest środkiem ciężkości trójkąta ABC. Wykazać, że

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(MA^2 + MB^2 + MC^2).$$

4. W wierzchołkach czworokąta umieszczono równe masy. Gdzie znajduje się środek masy takiego układu?