Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 I 2006

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
497 ($WT = 1{,}29$) i **498** ($WT = 2{,}58$)
z numeru 3/2005

Piotr Kumor	– Olsztyn	47,42
Bartłomiej Dyda	– Wrocław	46,83
Zbigniew Sewartowski	– Wieliczka	43,95
Jerzy Cisło	– Wrocław	43,90
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	40,93
Marian Kasperski	– Warszawa	36,86

Bez precedensu: dziewięć pełnych okrążeń! Piotr Kumor – trzykrotna „norma weterańska”. Bartłomiej Dyda zaś zamyka swoją czwartą rundę!

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 509, 510

Redaguje Marcin E. KUCZMA

509. Dany jest nieskończony ciąg liczb dodatnich $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Niech c_n będzie największą liczbą całkowitą, której kwadrat nie przekracza

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\tfrac{1}{a_1} + \ldots + \tfrac{1}{a_n}\right).$$

Wykazać, że ciąg $c_1, c_2, c_3, \ldots$ jest ściśle rosnący.

510. Dla ustalonej liczby naturalnej n rozważamy zbiór X, którego elementami są wszystkie ciągi $(x_1, \ldots, x_n)$ o wyrazach równych 0 lub 1. Określamy odległość

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|$$

dla $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in X$. Niech $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ spełniają warunek $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \delta(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \ell$ (wierzchołki „trójkąta równobocznego” w przestrzeni metrycznej $\langle X, \delta\rangle$). Wyznaczyć (w zależności od ℓ) najmniejszą liczbę r, dla której istnieje taki punkt $\mathbf{s} \in X$, że $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{s}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{s}, \mathbf{z}) = r$.

Zadanie 510 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 I 2006

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
396 ($WT = 2{,}60$), **397** ($WT = 1{,}60$), **398** ($WT = 2{,}08$) i **399** ($WT = 2{,}02$)
z numerów 4/2005 i 5/2005

Jerzy Witkowski	– Radlin	41,14
Marian Łupieżowiec	– Gliwice	30,22
Mateusz Łącki	– Kraków	25,87
Konrad Kapcia	– Częstochowa	25,19
Tomasz Tkocz	– Rybnik	16,47
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	15,04
Jacek Konieczny	– Poznań	13,38

Panu Witkowskiemu dopisane zostały punkty za rozwiązanie zadania 383, które zostało przysłane na nieaktualny adres redakcji i na dłuższy czas tam utknęło.

Zadania z fizyki nr 406, 407

Redaguje Jerzy B. BROJAN

406. Gęstość szkła wynosi $2{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$, a współczynnik załamania 1,5. Obliczyć natężenie strumienia światła skierowanego w górę (moc na jednostkę powierzchni prostopadłej) niezbędne do tego, aby w nim lewitowała kulka o promieniu 0,1 mm wykonana z tego szkła. Odbicie światła od powierzchni kulki, absorpcję, a także efekty falowe (dyfrakcję) należy pominąć.

407. Obwód elektryczny składa się ze źródeł siły elektromotorycznej i oporników podlegających prawu Ohma; ponadto w obwodzie znajduje się amperomierz oraz opornik o zmiennej oporności (niekoniecznie sąsiadujące). Stwierdzono, że przy dwóch różnych wartościach oporności tego opornika amperomierz wskazywał jednakową wartość natężenia prądu. Czy jest możliwe, żeby przy jeszcze innej oporności tego samego opornika amperomierz zmienił wskazanie?

Rozwiązanie zadania M 1115.

Przypuśćmy, że w danym momencie na tablicy występują liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Z równości

$$(1+a)(1+b) = 1 + (ab + a + b)$$

wynika, że wartość wyrażenia

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)$$

pozostaje niezmieniona podczas wykonywania opisanej procedury. Zatem jeśli po 2004 krokach pozostała na tablicy liczba x, to mamy

$$1 + x = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2005}\right) = 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2006}{2005} = 2006\,.$$

Stąd $x = 2005$.