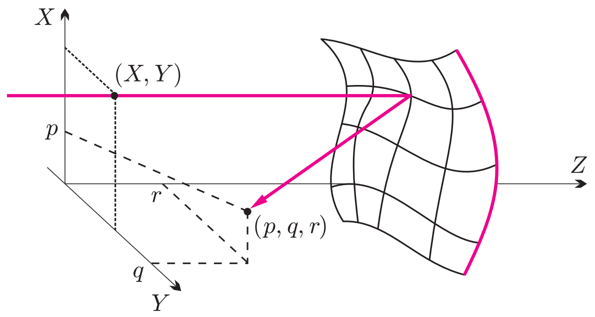
Ile jest zajączków?

Grzegorz DERFEL *

Zapewne każdy kiedyś puszczał zajączki. To znaczy odbijał zwykłym lusterkiem światło słoneczne na przykład ku nieoświetlonej ścianie. Trzeba przyznać, że plama światła jest wtedy mało ciekawa: oświetlenie jest jednakowe na całej jej powierzchni. Co innego jeśli lusterko nie jest płaskie. Promienie odbite nie są wtedy równoległe. Te z nich, które odbijają się od wklęsłych części zwierciadła, mogą tworzyć skupienia, w których natężenie światła jest szczególnie duże, co daje widoczne na ekranie jaśniejsze linie i punkty. Noszą one nazwę kaustyk (gr. *kaustikos* – żrący, palący). Powierzchnie odbijające o dowolnym kształcie – z rozmaitymi wgłębieniami i wypukłościami – można spotkać w różnych codziennych sytuacjach. Zajączki wytwarzane przez takie „pokrzywione" lusterka mają nieregularne kształty, zależne od orientacji lusterka i jego odległości od ekranu. Wydawać by się mogło, że rozmaitość kształtów powierzchni odbijających rodzi nieskończoną różnorodność postaci tych świetlnych wzorków i że nie ma szans na jakąkolwiek ich systematyzację. Można jednak wykazać, że są one utworzone z kilku elementarnych form.

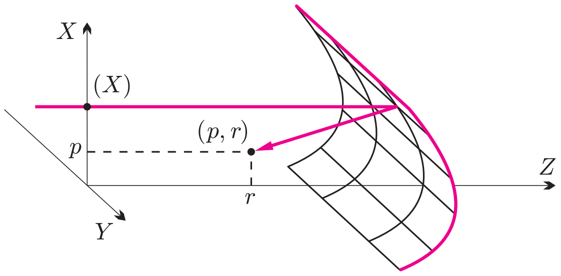
Zagadnienie powstawania i klasyfikacji kaustyk rozważymy z punktu widzenia optyki geometrycznej, z wyrozumiałością traktując nieskończoności, jakie przewiduje ona dla natężenia światła. Oczywiście istnieje bardziej realistyczny opis kaustyk, który uwzględnia falową naturę światła, a w szczególności zjawisko interferencji, i w którym nie pojawia się problem nieskończonego natężenia.

Niech wiązka promieni równoległych (np. słonecznych) pada wzdłuż osi Z układu współrzędnych na odbijającą powierzchnię o dowolnym kształcie (rys. 1).



Rys. 1

Płaszczyznę XY umieśćmy gdzieś przed zwierciadłem. Niech promień, którego położenie początkowe określone jest współrzędnymi (X, Y), przechodzi po odbiciu przez punkt, którego współrzędne oznaczymy przez (p, q, r). Drogę optyczną S przebytą przez promień od płaszczyzny XY do tego punktu wyrazimy jako funkcję dwóch zmiennych X i Y zależną od trzech parametrów p, q i r: $S(X, Y; p, q, r)$. W szczególnym przypadku, gdy zwierciadło jest dowolną powierzchnią walcową o tworzących równoległych do osi Y (rys. 2), droga optyczna jest funkcją jednej zmiennej X zależną od jednego lub dwóch parametrów: $S(X; p)$ lub $S(X; p, r)$. Drogi optyczne stanowią więc szczególne rodziny funkcji jednej lub dwóch zmiennych zależnych od jednego, dwóch lub trzech parametrów.



Rys. 2

Badanie i klasyfikacja funkcji n zmiennych zależnych od k parametrów jest przedmiotem teorii katastrof, której twórcą jest francuski matematyk René Thom. Zastosowanie podstawowego wyniku tej teorii do zdefiniowanych wyżej funkcji S wskazuje, że można je podzielić na pięć klas. Do każdej klasy należą funkcje mające tę samą ilość i rodzaj punktów krytycznych (są to punkty, w których znikają wszystkie pierwsze pochodne, a więc maksima, minima, siodła i pewne punkty przegięcia), co sprawia, że mają podobny kształt. Dzięki temu za pomocą gładkiej zamiany zmiennych (obejmującej zmiany skal, obroty osi i translacje) można każdą funkcję z danej klasy sprowadzić do tej samej standardowej postaci zwanej *katastrofą*. Katastrofy oznaczone są symbolami i mają zwyczajowe nazwy. Interesujące nas pięć klas zawiera funkcje równoważne pięciu katastrofom, które mają postać następujących wielomianów:

1. A_2; fałda (*fold*): $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax$
2. A_3; kolec, szpic (*cusp*): $f(x) = (\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx)$
3. A_4; jaskółczy ogon (*swallowtail*):
$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx$$
4. D_4^+; pępek hiperboliczny (*hyperbolic umbilic*):
$$f(x, y) = x^2y + y^3 + ax^2 + by + cx$$
5. D_4^-; piramida (*elliptic umbilic*):
$$f(x, y) = x^2y - y^3 + ax^2 + by + cx.$$

Zmienne x i y oraz parametry a, b i c powiązane są ze współrzędnymi X i Y oraz p, q i r gładkimi przekształceniami.

Rzeczywiste promienie świetlne przebiegają w przestrzeni po torach określonych zasadą Fermata. W najogólniejszym sformułowaniu stwierdza ona, że droga optyczna rzeczywistego promienia biegnącego między dwoma punktami jest najmniejsza spośród sąsiednich dróg z pewnego otoczenia tego promienia łączących te punkty, lub że ma wartość stacjonarną, tzn. nie jest ani maksymalną ani minimalną wśród takich dróg. Minimalną drogę przebywa np. promień załamujący się na granicy dwóch ośrodków.

*Instytut Fizyki, Politechnika Łódzka

Z przypadkiem wartości stacjonarnych mamy do czynienia, gdy np. promienie z punktowego źródła skupiane są idealną soczewką w punktowy obraz, bowiem ich drogi optyczne są jednakowe. Problem znalezienia drogi optycznej promienia jest więc zagadnieniem z dziedziny rachunku wariacyjnego. Wartość drogi optycznej promienia między dwoma punktami jest bowiem funkcjonałem zależnym od jej kształtu. Zasadę Fermata można formalnie wyrazić w postaci stwierdzenia, że „wariacja drogi optycznej musi być równa zeru". W rozpatrywanym tu przypadku przy określaniu drogi optycznej wykorzystujemy fakt, że promienie są prostoliniowe, co pozwala wyrazić drogę optyczną nie jako funkcjonał, lecz w opisany wyżej sposób jako funkcję $S(X, Y; p, q, r)$. Aby zbadać możliwe kształty kaustyk należy rozpatrzyć możliwe drogi promieni. W tym celu więc trzeba zająć się punktami krytycznymi pięciu przytoczonych wielomianów.

W przypadku funkcji jednej zmiennej punkty te zadane są równaniem

(1) $$\mathrm{d}f/\mathrm{d}x = 0,$$

a w przypadku funkcji dwóch zmiennych – układem równań

(1′) $$\partial f/\partial x = 0, \quad \partial f/\partial y = 0.$$

Warunek (1) określa w czterowymiarowej przestrzeni (x, a, b, c), a warunek (1′) w pięciowymiarowej przestrzeni (x, y, a, b, c), obszar zwany zbiorem katastrofy, K. W zbiorze tym można wyróżnić obszary różniące się rodzajem ekstremów. Granice między tymi obszarami zadane są w przypadku jednej zmiennej warunkiem

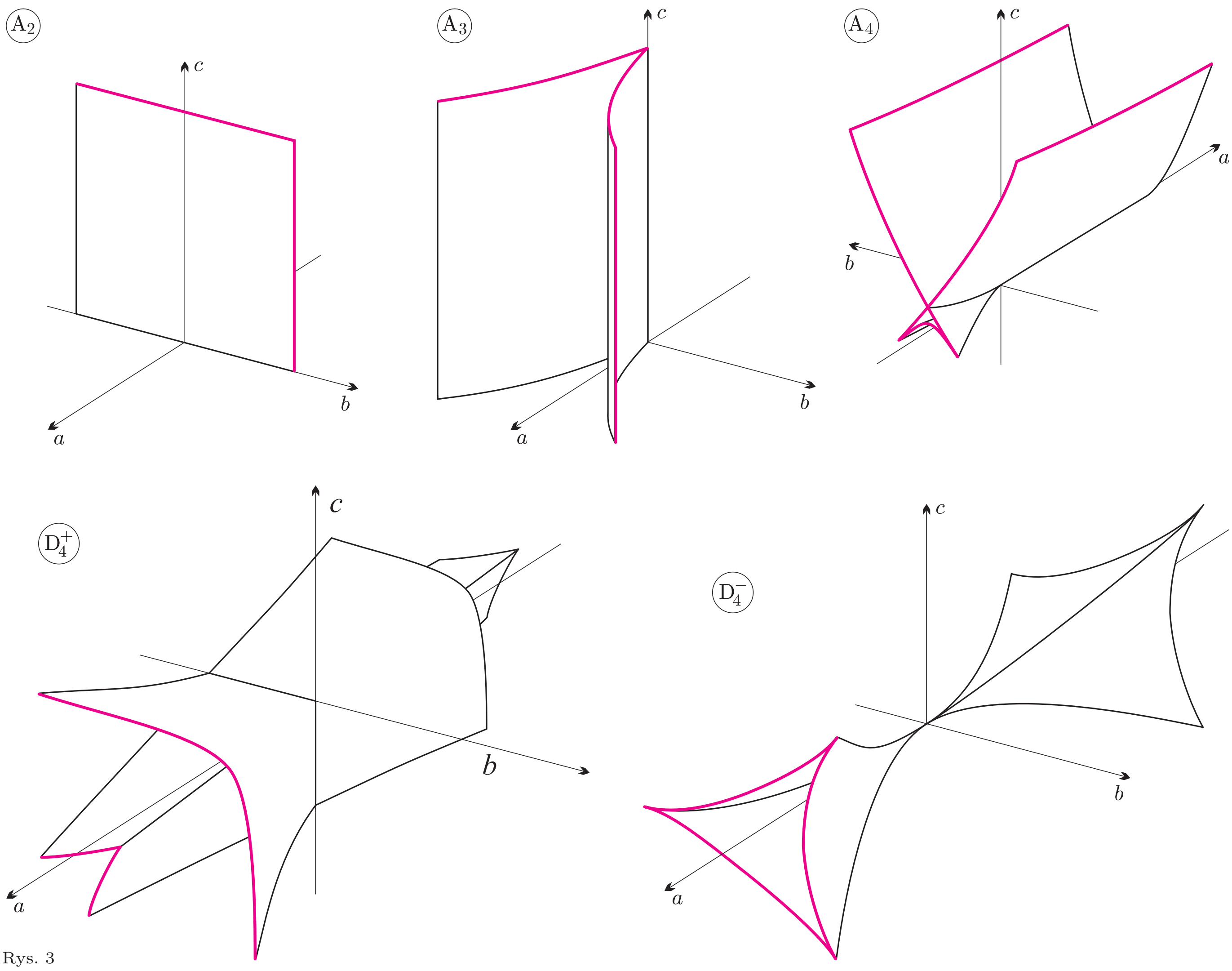
(2) $$\mathrm{d}^2 f/\mathrm{d}x^2 = 0,$$

a w przypadku dwóch zmiennych warunkiem

(2′) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$$

Z układów równań (1) i (2) oraz (1′) i (2′), po wyrugowaniu z nich zmiennych x i y, otrzymuje się równania, które w przestrzeni (a, b, c) definiują powierzchnie, krzywe i punkty, wytyczające granice obszarów różniących się ilością ekstremów funkcji zmiennych x i y (różnica ta zawsze wynosi 2). Tworzą one razem zbiór bifurkacyjny katastrofy, B. Rys. 3 przedstawia zbiory bifurkacyjne pięciu wymienionych katastrof. Odpowiadają im analogiczne granice w fizycznej przestrzeni (p, q, r) rozdzielające obszary, przez które przechodzi różna ilość promieni.

Istotne dla nas właściwości zbiorów K i B można pokazać za pomocą jednego z prostszych przypadków,



Rys. 3

jakim jest katastrofa A_3. Jest to funkcja jednej zmiennej zależna od dwóch parametrów, jest więc odpowiednia do opisu drogi optycznej promieni odbitych od wklęsłej powierzchni walcowej i jednocześnie możliwa do przedstawienia graficznego. Właśnie taka kaustyka powstaje np. na powierzchni kakao w kubku po odbiciu promieni od jego wewnętrznej ścianki. Rys. 4 pokazuje zbiór katastrofy, który jest powierzchnią utworzoną przez rozwiązania równania (1) czyli

(3) $$x^3 + ax + b = 0.$$

Dla $a < 0$ ma ona dwie fałdy, dzięki którym powstają trzy płaty powierzchni. Środkowy płat odpowiada minimom a zewnętrzne – maksimom. W dolnej części rysunku widać rzut fałd na płaszczyznę (a, b), który jest granicą dzielącą tę płaszczyznę na obszary z jednym i z trzema ekstremami, czyli zbiór bifurkacyjny. Wynika ona z warunków (1) i (2), które tworzą układ złożony z równania (3) i równania

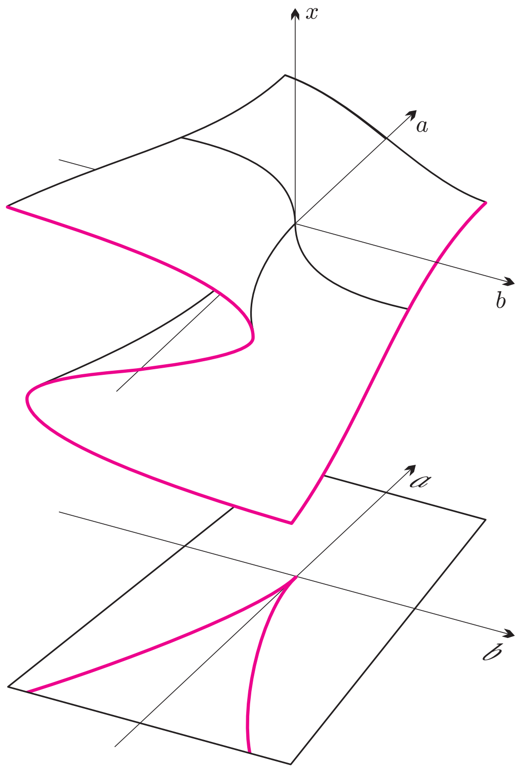
(4) $$3x^2 + a = 0.$$

Jest to tzw. parabola półsześcienna

(5) $$4a^3 + 27b^2 = 0.$$

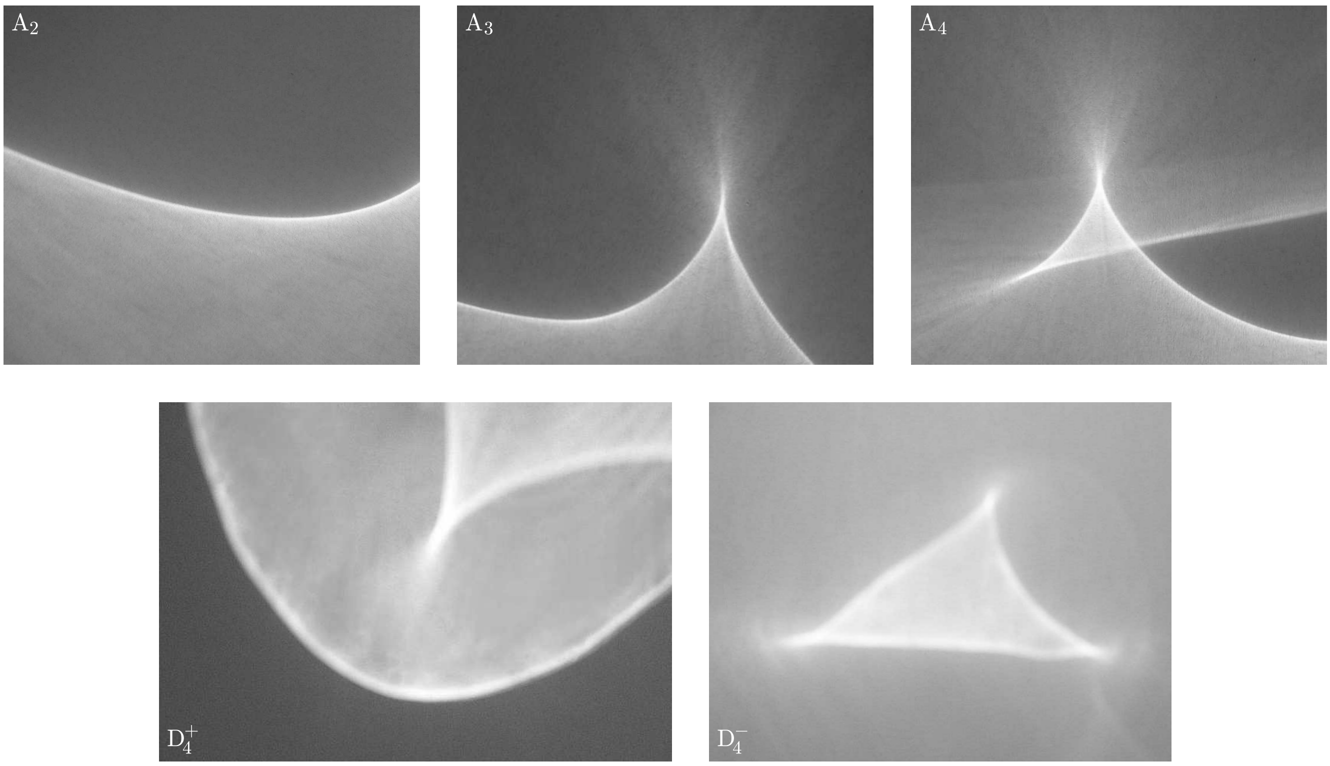
składająca się z dwóch gałęzi ułożonych w szpic.

Drogi przebywane przez rzeczywiste promienie są ekstremalne, jednak nie bezwzględnie, lecz względem sąsiednich *równoległych* i *prostoliniowych* promieni trafiających po odbiciu w dany punkt, któremu odpowiadają parametry (a, b). Spośród trzech promieni przechodzących przez każdy punkt odpowiadający parametrom spomiędzy gałęzi paraboli (5) tylko jeden ma drogę mniejszą od sąsiednich; drogi dwóch pozostałych są dłuższe niż sąsiednie, lecz i tak krótsze od dróg krzywoliniowych wykluczonych przez naszą definicję funkcji S.



Rys. 4

Górna część rysunku 4 przekonuje, że dla punktów (a, b) z pobliża zbioru bifurkacyjnego B występuje szczególnie dużo ekstremów. Oznacza to, że przez punkty przestrzeni odpowiadające parametrom bliskim zbiorowi bifurkacyjnemu przechodzi szczególnie dużo promieni. Natężenie światła jest więc tam wyjątkowo duże, a w punktach zbioru B – nieskończone (co jest konsekwencją zaniedbania falowej natury światła). Jeżeli uwzględnimy trzecią współrzędną, do której walcowe

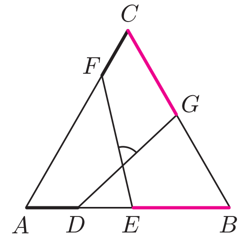


zwierciadło jest równoległe, to otrzymamy zbiór B w postaci dwupłatowej powierzchni z ostrzem, pokazanej na rys. 3. Analogiczne właściwości mają pozostałe zbiory katastrof i związane z nimi zbiory bifurkacyjne. Trzeba pamiętać, że zbiory bifurkacyjne pokazane na rys. 3 powstały po zamianie zmiennych i parametrów użytych do wyrażenia rzeczywistej drogi optycznej. Obserwowane kaustyki są przekrojami odpowiadających im zbiorów punktów (p, q, r) powierzchnią ekranu. Ich istotnie różne kształty przedstawione są na zdjęciach. Jest ich pięć i liczbę tę można uznać za zadowalającą odpowiedź na tytułowe pytanie. W wyjątkowych przypadkach mogą powstać nietypowe, inne kaustyki, są one jednak niestabilne tzn. w następstwie dowolnie małej zmiany kształtu zwierciadła rozpadają się na kaustyki elementarne, które są na takie zmiany odporne. Zazwyczaj refleksy wytworzone przez różne fragmenty zwierciadła o dowolnie pofałdowanej powierzchni są bardzo liczne. Nakładają się, dając pogmatwany obraz, w którym trudno wyróżnić kaustyki elementarne.

Kaustyki optyczne powstają nie tylko wskutek odbicia światła. Tęcza, która jest kaustyką typu fałda, powstaje przy udziale odbicia i załamania na powierzchni kropelek wody. Kaustyki tworzą się przy przechodzeniu światła przez ośrodki optycznie niejednorodne lub warstwy przezroczyste o niejednakowej grubości. Promienie równoległe do osi soczewki skupiającej obarczonej aberracją sferyczną dają w jej ognisku kaustykę typu kolec, wyraźnie rozpoznawalną, jeśli abstrahować od symetrii osiowej. Promienie przyosiowe skupiają się najdalej od soczewki i tworzą ognisko na „czubku kolca”. Promienie odległe od osi skupiają się bliżej soczewki. Obwiednia promieni jest kaustyką. Przez każdy punkt w jej wnętrzu przechodzą trzy promienie, podczas gdy przez punkty leżące na zewnątrz – tylko jeden. Interesujące są kaustyki optyczne powstałe w wyniku zjawiska soczewkowania grawitacyjnego. Kaustyki pojawiają się także przy rozchodzeniu się innych rodzajów fal – dźwiękowych, gdzie przejawiają się jako rodzaj fal uderzeniowych, oceanicznych, gdzie wywołują gigantyczne fale o niszczącej sile, fal elektromagnetycznych w jonosferze, plazmie międzyplanetarnej i okołosłonecznej, fal materii uczestniczących w procesach rozpraszania, fal sejsmicznych i innych.

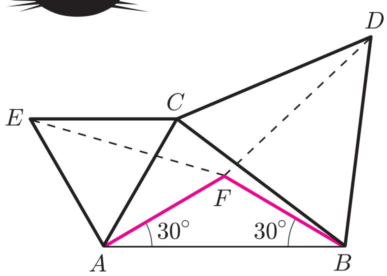
Zadania

Redaguje Waldemar POMPE



Rys. 1

M 1114. Punkty D i E leżą na boku AB trójkąta równobocznego ABC (rys. 1). Punkty F i G leżą odpowiednio na bokach AC i BC przy czym $AD = CF$ i $BE = CG$. Wykazać, że proste DG i EF przecinają się pod kątem $60°$.
Rozwiązanie na str. 11

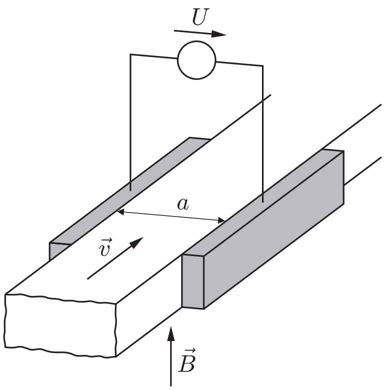


Rys. 2

M 1115. Na tablicy napisano liczby $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2005}$. Wykonujemy następującą procedurę: Wybieramy dwie liczby a, b znajdujące się na tablicy i zastępujemy je liczbą $ab + a + b$. Postępowanie to kontynuujemy. Po 2004 krokach zostanie na tablicy tylko jedna liczba. Jakie wartości może ona przyjąć?
Rozwiązanie na str. 15

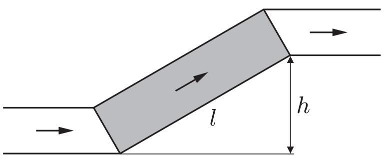
M 1116. Na bokach BC i AC trójkąta ABC budujemy, na zewnątrz niego, trójkąty równoboczne BCD i ACE (rys. 2). Na boku AB budujemy, do wnętrza trójkąta ABC, trójkąt ABF, w którym $\sphericalangle FAB = \sphericalangle FBA = 30°$. Udowodnić, że $DF = EF$.
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI



Rys. 3

F 655. Pompa elektromagnetyczna do tłoczenia płynnego przewodnika (np. metalu) składa się z rury o przekroju prostokątnym, w której dwie przeciwległe ściany odległe o a zrobione są z bardzo dobrego przewodnika, dwie pozostałe z izolatora (rys. 3). Do przewodzących ścianek przyłożono napięcie U, a całość umieszczono w pionowym, jednorodnym polu magnetycznym B. Dla jakiej prędkości przepływu płynu moc skuteczna pompy jest największa? Jaka jest wtedy jej sprawność? Pominąć opór elektryczny źródła prądu i ścianek.
Rozwiązanie na str. 2



Rys. 4

F 656. Pompa z poprzedniego zadania, mająca długość l, wykorzystywana jest do tłoczenia cieczy o gęstości ρ i przewodnictwie właściwym σ pod górę na wysokość h (rys. 4). Z jaką prędkością porusza się tłoczona ciecz?
Rozwiązanie na str. 10