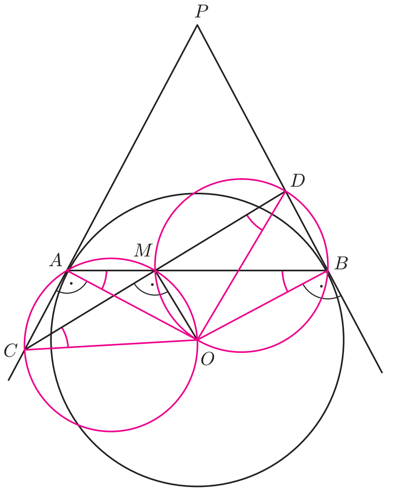
Średnie w trapezie

Joanna JASZUŃSKA[*]

Rozwiązanie zadania M 1111.
Z równości $\sphericalangle CAO = 90^\circ = \sphericalangle CMO$ wynika, że punkty C, A, M, O leżą na jednym okręgu.



Analogicznie, punkty B, D, M, O leżą na jednym okręgu. Zatem

$$\sphericalangle OCM = \sphericalangle OAM = \sphericalangle OBM = \sphericalangle ODM,$$

skąd wynika, że $OC = OD$. Odcinek OM jest więc wysokością w trójkącie równoramiennym COD, a więc $CM = DM$.

Dla liczb dodatnich $a \geqslant b$ zachodzi następująca nierówność:

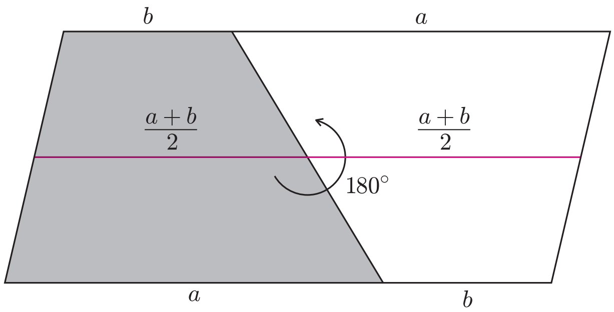
$$a \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \geqslant b,$$

przy czym każda z równości ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.
Cztery występujące tu średnie pomiędzy liczbami a i b to odpowiednio średnia *kwadratowa, arytmetyczna, geometryczna* i *harmoniczna*.

Czy da się te cztery średnie „znaleźć" w trapezie o podstawach a i b? Okazuje się, że tak! Są one długościami odpowiednio dobranych odcinków *poziomych*, czyli przekrojów trapezu, równoległych do jego podstaw. Co więcej, nietrudno udowodnić powyższą nierówność, korzystając z własności tych odcinków.
Na początek wskażmy w trapezie wszystkie cztery średnie, dowód nierówności pozostawiając na później.

Średnia arytmetyczna (A). Chyba najłatwiejsza do znalezienia i najbardziej znana — wystarczy wziąć *środkową* trapezu, czyli odcinek łączący środki jego ramion.

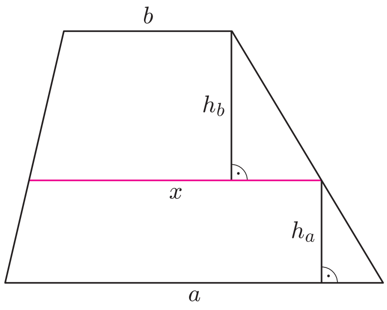
Z twierdzenia Talesa odcinek ten jest równoległy do podstaw. Aby przekonać się, że rzeczywiście jest on długości $\frac{a+b}{2}$, obróćmy trapez o 180° względem środka ramienia (rysunek 1).



Rys. 1

Figura otrzymana jako suma trapezów (wyjściowego i nowego) jest równoległobokiem o długości podstawy $a+b$, więc takiej też długości jest odcinek zbudowany z dwóch środkowych. Stąd każda z nich jest długości $\frac{a+b}{2}$.

Średnia kwadratowa (K). Podzielmy trapez odcinkiem równoległym do podstaw na dwa trapezy o równych polach. Przesuwając poziomy odcinek od jednej podstawy do drugiej, nietrudno się przekonać, że jest dokładnie jedno jego „dobre" położenie.



Rys. 2

Jaka jest wtedy długość tego odcinka? Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 2, ponadto niech S będzie polem trapezu.

Wtedy

$$\frac{S}{2} = \frac{a+x}{2}\cdot h_a \qquad \text{i} \qquad \frac{S}{2} = \frac{b+x}{2}\cdot h_b,$$

stąd

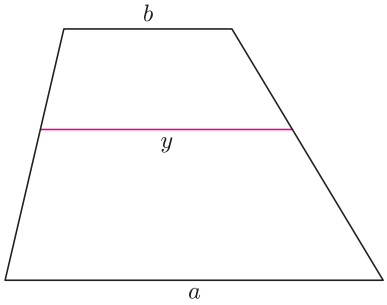
$$S = \frac{a+b}{2}\cdot(h_a+h_b) = \frac{a+b}{2}\cdot\left(\frac{S}{a+x}+\frac{S}{b+x}\right) =$$

$$= \frac{S(a+b)}{2}\cdot\frac{b+x+a+x}{(a+x)(b+x)} = S\cdot\frac{(a+b)^2+2x(a+b)}{2ab+2x^2+2x(a+b)}.$$

Wobec tego $2ab+2x^2 = (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, więc

$$x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

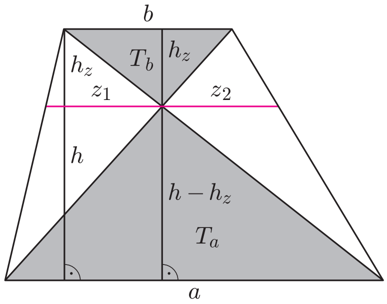
[*] Instytut Matematyczny PAN



Rys. 3

Średnia geometryczna (G). Podzielmy ponownie nasz trapez odcinkiem poziomym, ale tym razem inaczej — tak, by otrzymane trapezy były podobne (rysunek 3).

Znów nasuwa się pytanie, czy w ogóle można to zrobić i jeśli tak, to czy tylko na jeden sposób. Dla $a = b$ trapez jest równoległobokiem, a szukany odcinek to jego środkowa. Dla $a > b$ podzielmy trapez poziomym odcinkiem o długości y. Zauważmy, że otrzymane trapezy mają odpowiednie kąty równe, więc aby były podobne, potrzeba i wystarcza, by miały równe stosunki długości odpowiednich podstaw: $\frac{a}{y} = \frac{y}{b}$, czyli by $y = \sqrt{ab}$. Jest to liczba z przedziału (b, a), więc taki przekrój trapezu istnieje i to dokładnie jeden.



Rys. 4

Średnia harmoniczna (H). Jaka jest długość z odcinka równoległego do podstaw trapezu i przechodzącego przed punkt przecięcia jego przekątnych? Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 4.

Z podobieństwa trójkątów o odpowiednich podstawach i wysokościach otrzymujemy

$$\frac{a}{z_1} = \frac{h}{h_z}$$

i analogicznie dla z_2, co dowodzi, że $z_1 = z_2$. Korzystając z powyższej proporcji i z podobieństwa trójkątów T_a i T_b, uzyskujemy

$$\frac{a}{z_1} = \frac{h}{h_z} = \frac{h - h_z}{h_z} + 1 = \frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b},$$

więc

$$z = z_1 + z_2 = 2z_1 = 2 \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

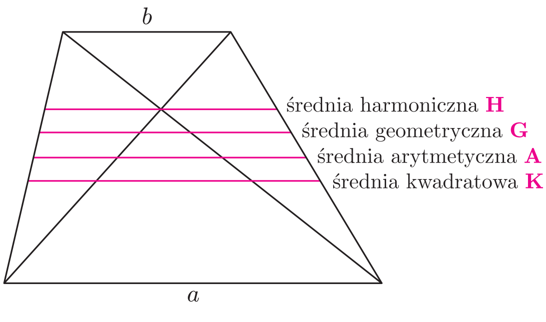
Znaleźliśmy zatem w trapezie wszystkie cztery średnie i wiemy, że odpowiadające im odcinki leżą pomiędzy podstawami. Ale czy leżą one we właściwej kolejności, czyli czy rzeczywiście zawsze zachodzi podana na początku nierówność? Dla $a = b$ trapez jest równoległobokiem, wszystkie cztery odcinki pokrywają się i wszystkie cztery średnie są równe. A co się dzieje dla $a > b$?

K > A: Zauważmy, że dolny z trapezów o równych polach ma odpowiednie podstawy dłuższe niż górny, zatem musi mieć mniejszą wysokość. Stąd wyznaczający te trapezy odcinek leży poniżej środkowej.

A > G: Tu z kolei dolny z dwóch trapezów podobnych też ma odpowiednie podstawy dłuższe, ale tym razem oznacza to, że i wysokość musi mieć dłuższą. Stąd wyznaczający te trapezy odcinek leży powyżej środkowej.

G > H: Dla trapezów podobnych stosunek wysokości górnego do dolnego jest równy stosunkowi długości odpowiednich podstaw, czyli jest większy niż $\frac{b}{a}$. Wobec tego odcinek wyznaczający te trapezy leży poniżej przekroju dzielącego wysokość całego trapezu w stosunku $b : a$ (licząc od góry), czyli poniżej poziomego odcinka przechodzącego przez punkt przecięcia przekątnych.

To kończy dowód naszej nierówności. Może ktoś z Czytelników zna inne poziome przekroje trapezu o ciekawych własnościach? A może nierówność średnich dla trzech liczb też da się jakoś ładnie zilustrować, na przykład w przestrzeni trójwymiarowej?



Rys. 5