Jednoznaczność rozkładu na składniki

Twierdzenie o jednoznaczności rozkładu liczby naturalnej na czynniki pierwsze powiada, że każdą liczbę naturalną większą od 1 można przedstawić jednoznacznie w postaci iloczynu liczb pierwszych (z dokładnością do kolejności). Czy można znaleźć odpowiednik tego twierdzenia, dotyczący ... sumy, a nie iloczynu? Inaczej mówiąc, czy można udowodnić, że każdą liczbę naturalną można przedstawić jednoznacznie w postaci sumy pewnych liczb naturalnych? Oczywiście, te ostatnie nie mogą być dowolne, bo każdą liczbę naturalną większą od 2 można przedstawić jako sumę takich liczb na wiele sposobów. No, ale rozkładając liczbę naturalną na czynniki też nie bierzemy dowolnych czynników, lecz wyłącznie czynniki pierwsze.

Jakie liczby miałyby pełnić rolę liczb pierwszych przy rozkładzie liczby naturalnej na sumę? Są takie liczby: to liczby Fibonacciego. Przypomnijmy: ciągiem Fibonacciego nazywamy ciąg (F_n) zdefiniowany rekurencyjnie w sposób następujący: $F_0 = 1, F_1 = 1$ oraz $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dla $n \geqslant 1$. Wyrazy tego ciągu nazywamy liczbami Fibonacciego. Liczby Fibonacciego są oczywiście liczbami naturalnymi i łatwo zauważyć, że ciąg Fibonacciego nie jest ograniczony z góry.

Oto piętnaście początkowych liczb Fibonacciego: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610

Wykażemy następujące twierdzenie:

Każdą liczbę naturalną można przedstawić jednoznacznie w postaci sumy różnych, niesąsiednich liczb Fibonacciego.

Zobaczmy na przykładzie liczby 120, jak wygląda rozkład liczby naturalnej na sumę liczb Fibonacciego. Znajdujemy największą liczbę Fibonacciego, która nie przekracza 120. To 89, i ta liczba jest pierwszym składnikiem rozkładu liczby 120. Musimy jeszcze tę sumę uzupełnić o $120-89$, czyli o 31. Teraz znajdujemy największą liczbę Fibonacciego, która nie przekracza 31. Tą liczbą jest 21, dodajemy ją do 89. Zostaje 10, największą liczbą Fibonacciego, mieszczącą się w 10, jest 8; zostaje 2, ale to już jest liczba Fibonacciego, więc dodajemy ją do dotychczasowej sumy i mamy:

$$120 = 89 + 21 + 8 + 2.$$

Zauważmy teraz dwie rzeczy. Po pierwsze, jeśli rozkładając w ten sposób liczbę n, wybieramy F_k, czyli F_k jest największą liczbą Fibonacciego nieprzekraczającą n, to w następnym kroku nie możemy wybrać F_{k-1}, bo to by znaczyło, że

$$F_k + F_{k-1} = F_{k+1} \leqslant n$$

– a przecież F_k jest największą liczbą Fibonacciego nie większą od n. W naszym rozkładzie nie pojawią się więc dwie sąsiednie liczby Fibonacciego. Po drugie, wybór największej liczby Fibonacciego nie większej od danej liczby naturalnej jest określony jednoznacznie – a więc i taki rozkład jest jednoznaczny (z dokładnością do kolejności, bo przecież dodawanie jest przemienne).

Twierdzenie i sam rozkład opatrzone są nazwiskiem Edouarda Zeckendorfa, matematyka-amatora (lekarza z wykształcenia). Zeckendorf zainteresował się matematyką, gdy jako oficer armii belgijskiej i jeniec wojenny przebywał w latach 1940–1945 w obozie dla internowanych. Matematyka bywa bowiem pocieszeniem w wielu trudnych sytuacjach...

Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL